UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS,**

**FÍSICAS Y NATURALES**

# CURSO DE INGRESO

## *Módulo de Matemática*

**Apunte teórico práctico para las carreras:**

**LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

**LICENCIATURA EN SISTEMAS DE LA INFORMACIÓN**

**LICENCITUARA EN BIOLOGÍA**

**LICENCIATURA EN CIENCIAS GEOLÓGICAS**

**LICENCIATURA EN FÍSICA**

**LICENCIATURA EN GEOFÍSICA**

**LICENCIATURA EN ASTRONOMÍA**

**TECNICATURA UNIVERSITARIA EN PROGRAMACIÓN WEB**

**2027**

## CONSEJOS PARA TENER EN CUENTA ANTES DE EMPEZAR

- ✓ ***Leer comprensivamente cada contenido, entendiendo el porqué de cada paso.***
- ✓ ***Resolver paso a paso cada ejercicio, justificando, acompañando siempre con los cálculos auxiliares necesarios para completar el proceso.***
- ✓ ***Aprender de los ejemplos, analizando. Hacelos de nuevo por tu cuenta y luego autocorregir.***
- ✓ ***Interpretar antes de resolver, ¿qué me está pidiendo el ejercicio? ¿qué contenido está involucrado?***
- ✓ ***Muestra tu proceso, el resultado es importante pero el camino aún más. Debe ser claro y ordenado.***
- ✓ ***Equivocarse es parte del aprendizaje, los errores no son el problema, sino una herramienta para aprender.***
- ✓ ***¡NO TE QUEDES CON DUDAS! PREGUNTAR ES UNA FORMA DE APRENDER, ESTAMOS PARA ACOMPAÑARLOS.***

# ÍNDICE DE CONTENIDO

## APUNTES TEÓRICOS

## PRÁCTICAS


APUNTES
TEÓRICOS

# UNIDAD 1 – INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA. CONJUNTOS. CONJUNTOS NUMÉRICOS Y OPERACIONES.

## 1. INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA

### Proposiciones y conectivos lógicos

Una proposición es todo enunciado al que se le puede asignar uno y sólo uno de los valores de verdad, que son: VERDADERO (V) o FALSO (F).

Por lo general, las proposiciones se representan con las letras minúsculas del alfabeto, desde la letra $p$ en adelante, es decir, $p, q, r, s, t, \ldots$ etc.

**Si se escribe: $V(p) = V$ se lee: el valor de verdad de la proposición $p$ es Verdadero.**

Veamos algunos ejemplos:

a) Sea la proposición $p$: San Juan es una provincia argentina $\Rightarrow$ $V(p) = V$

b) Sea la proposición $q$: San Juan es una provincia de Chile $\Rightarrow$ $V(q) = F$

c) Sea la proposición $s$: el número 15 es divisible por 2 $\Rightarrow$ $V(s) = F$

d) Sea la proposición $u$: el oro es un metal precioso $\Rightarrow$ $V(u) = V$

e) Sea la proposición $w$: $2 + 6 = 10$ $\Rightarrow$ $V(w) = F$

***Ejercicio:*** Decidir si las siguientes oraciones son proposiciones y en caso afirmativo dar su valor de verdad:

a) Gravedad en la Luna.

b) La corteza terrestre está formada principalmente por silicatos.

c) Océano Pacífico.

d) El basalto tiene una textura vítrea.

e) La fosa de las islas Marianas está en el océano atlántico.

Nota: en caso de no tener conocimiento de algunas de las proposiciones anteriores, pueden investigar acerca del valor de verdad.

A continuación, veremos conectivos importantes que usaremos en adelante.

| **Conectivos Lógicos** | **Símbolo** | **Se lee como :** |
|---|---|---|
| Negación | $\sim$ | “no …..” o “no es cierto que … |
| Conjunción lógica | $\wedge$ | “…. y ….” |
| Disyunción lógica | $\vee$ | “… o …” (en sentido incluyente) |
| Condicional (implicación) | $\Rightarrow$ | “… implica …”, o “si… entonces …” |

Las proposiciones pueden ser simples (atómicas) donde se involucra una sola proposición que puede ser verdadera o falsa. Mientras que una proposición compuesta, estar formada por una o más proposiciones simples, unidos por conectivos lógicos: $\wedge$ ,$\vee$ , $\Rightarrow$ , $\Leftrightarrow$, $\sim$

Ejemplo: Dadas las proposiciones $r$: Pitágoras era griego ; $q$: Pitágoras era geómetra.

Escribir en lenguaje simbólico las siguientes proposiciones:

a) Pitágoras era griego y geómetra: $r \wedge q$
b) Si Pitágoras era griego, entonces era geómetra: $p \Rightarrow q$
c) No es cierto que Pitágoras era geómetra: $\sim q$

Ejemplo: Identificar si las siguientes, son proposiciones **simples** ó **compuestas.** Traducir luego a notación simbólica utilizando conectivos lógicos.

a) Un rectángulo tiene dos pares de lados paralelos.

Es una proposición simple. Siendo $p$: “Un rectángulo tiene dos pares de lados paralelos”

b) Si vienes a casa, entonces cenamos juntos.

Es una proposición compuesta. Considerando, $p$: “vienes a casa” y $q$: “cenamos juntos”, en notación simbólica se tiene: $p \Rightarrow q$

c) Si vienes a casa, entonces, cenamos juntos o miramos una película.

Es una proposición compuesta. Considerando, $p$: “vienes a casa”; $q$: “cenamos juntos”, y $r$: “miramos una película” en notación simbólica se tiene: $p \Rightarrow (q \vee r)$

Nota: Suponiendo que el condicional $p \Rightarrow q$ sea verdadero, esto NO implica que también sea válida la proposición $q \Rightarrow p$. Es decir, ambas implicaciones no tienen siempre el mismo valor de verdad. Veamos un ejemplo de este caso a continuación.

Ejemplo: Esta claro que $p$: “Si llueve”, entonces $q$: “Mi patio se moja”.

Es cierto que si ocurre $p$, entonces ocurre $q$. Es cierto que, si llueve, entonces mi patio se moja. Pero que mi patio esté mojado, no implica que llovió (se pudo haber mojado de otro modo).

IMPORTANTE: Dado el condicional $p \Rightarrow q$ , llamaremos a:

- **Recíproco:** $q \Rightarrow p$
- **Contrarrecíproco:** $\sim q \Rightarrow \sim p$

*NO OLVIDAR:*

- *Si* $V(p \Rightarrow q) = V$ *entonces no podemos asegurar que* $V(q \Rightarrow p) = V$.
- *Sin embargo, el condicional y su contrarrecíproco, SI tienen siempre el mismo valor de verdad (para todo valor de verdad de p o q). Este tipo de proposiciones se llaman equivalentes.*

Ejemplo: Dadas las siguientes proposiciones, se observa en la tabla su recíproco, y su contrarrecíproco; tanto en lenguaje coloquial como simbólico.

$p$: "está lloviendo"; $q$: "hay nubes en el cielo"

| | **Lenguaje lógico** | **Lenguaje coloquial** |
|---|---|---|
| **Condicional** | $p \Rightarrow q$ | Si está lloviendo entonces hay nubes en el cielo. |
| **Recíproco de** $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ <br> "si $p \Rightarrow q$ es verdadera, su recíproca *no necesariamente es verdadera*" | Si hay nubes en el cielo, entonces está lloviendo. |
| **Contrarrecíproco de** $p \Rightarrow q$ | $\sim q \Rightarrow \sim p$ | Si no hay nubes en el cielo, entonces no está lloviendo. |

Ejercicio: Sean $p, q$ y $r$ las proposiciones siguientes:

$p$: "está lloviendo" ; $q$: "el sol esta brillando" ; $r$: "hay nubes en el cielo"

Traducir las siguientes proposiciones a lenguaje coloquial:

a) $r \Rightarrow \sim q$ b) $\sim(r \wedge q)$

Nota importante: Para el tema siguiente, trabajamos con la noción de conjunto en forma intuitiva, con el apoyo de docentes en las clases. Puesto que dicho contenido se trata en detalle, en la siguiente unidad.

## Funciones proposicionales

Considérense las siguientes proposiciones:

Gustavo es médico. Álvaro es médico. Martha es médica.

Estas proposiciones tienen algo en común, y es la propiedad de "ser médico", y tienen diferente el sujeto.

Esto puede formularse recurriendo a la expresión "$x$ es médico" en donde $x$ es una variable individual, la cual indica que el sujeto o término que tiene la propiedad de ser médico. *La expresión "x es médico" no puede considerarse como una proposición puesto que no es posible determinar si es verdadera o falsa (depende del sujeto a considerar).* Aquí $x$ es una variable que toma valores dentro de un conjunto, llamado **conjunto de referencia (universo)**, que puede ser denotado con la letra $U$.

Una función proposicional es una expresión dada en términos de una o varias variables, las cuales pertenecen a un conjunto de referencia, la misma puede ser denotada con:

$$P(x) \quad o \quad P(x,y)$$

dependiendo de la/s variables implicadas en la misma.

Notar que si escribimos la función proposicional $Q(x)$: $x$ es geólogo ; no es posible determinar si es verdadero o falso, por lo que no se conoce cuál es el sujeto.

Sin embargo, si en dicha función proposicional sustituimos en la variable algún sujeto del conjunto de referencia, se convierte en una proposición y en este caso sí podríamos mencionar el valor de verdad.

Ejemplo: Siguiendo con la función proposicional $Q(x)$: $x$ es geólogo ; si consideramos que nuestro de conjunto de referencia está formado por las siguientes personas:

$$U = \{Mario, Lucia, Juana, Sebastian\}$$

Entonces: Q(Mario) es una proposición dada por: Mario es geólogo

Y es posible asignar un valor de verdad.

Nota: Las funciones proposicionales pueden negarse y también combinarse con otras funciones proposicionales o proposiciones simples por medio de los conectivos.

Ejemplo: Sea la función proposicional $S(x,y)$: $x = 2y$ ; y consideremos el conjunto de referencia:

$$U = \{1,2,4,6,8,12,15\}$$

- $S(1,3)$ es la proposición: $1 = 2.3$ lo cual, resulta falso
- $S(12,6)$ es la proposición: $12 = 2.6$ lo cual, resulta verdadero

## Cuantificadores

A partir de funciones proposicionales es posible obtener proposiciones generales mediante un proceso llamado de cuantificación. Asociados a la variable $x$, introducimos los símbolos $\forall x$ y $\exists x$, llamados **cuantificador universal** y **cuantificador existencial,** respectivamente.

Por ejemplo:

- $(\forall x)\ P(x)$ se lee: Para todo $x$ se verifica $P(x)$
- $(\exists x)\ P(x)$ se lee: Para algún $x$ se verifica $P(x)$

MUY IMPORTANTE:

- *Una función proposicional cuantificada universalmente es V si y sólo si son VERDADERAS TODAS las proposiciones particulares asociadas a ella (para todo x).*
- *Para asegurar la verdad de una proposición cuantificada existencialmente es suficiente que sea VERDADERA ALGUNA de las proposiciones asociadas a la función proposicional (para algún x).*

Ejemplos:

1) Dada la función proposicional $T(x)$: $x$ es mayor que cero ; $U = \{1,5,4,8,9\}$

Se verifica que: $\forall x, T(x)$ es VERDADERO. Porque todo elemento dentro del conjunto $U$ es mayor que cero.

2) Dada $S(x)$: $x$ es mayor que cero ; $U = \{-5,-1,1,5,4,8,9\}$

Se verifica que: $\forall x, T(x)$ es FALSO. Porque no todo elemento dentro del conjunto $U$ es mayor que cero. Para justificarlo, podemos mencionar al menos un elemento que no lo cumple, por ejemplo:

$$\exists\ x = -5 \text{ en el conjunto } U \text{ y dicho número no es mayor que cero}$$

## 2. ***CONJUNTOS***

### Noción intuitiva de conjunto y su representación

La palabra **CONJUNTO** refiere intuitivamente a una agrupación o colección de objetos (finita o infinita) que reciben el nombre de elementos, pudiendo ser los mismos de cualquier naturaleza. Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas y sus elementos con letras minúsculas. Todo conjunto está inmerso en otro conjunto llamado Universal.

- **Conjuntos finitos**: Son aquellos para los cuales se puede contar la cantidad de elementos. Pueden expresarse por,
  - Extensión: Se escriben todos los elementos del conjunto entre llaves, separados por comas, sin repetirse. No importa el orden en el cual se escriben.

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

- <u>Comprensión</u>: El conjunto queda definido entre llaves, acompañado de una cláusula (propiedad) que los identifique a todos, dentro del conjunto de referencia $U$.

$$A = \{x \in U : x \ es\ una\ vocal\}$$

$$B = \{x \in U : x \text{ es un número par}\}$$

- **Conjuntos infinitos**: Son aquellos donde no podemos determinar cuántos elementos tienen. Estos conjuntos sólo admiten la representación por comprensión.

## Conjuntos notables

- Conjunto vacío: Llamaremos conjunto vacío a aquel que no posee elementos, y lo simbolizaremos con $\emptyset$. Por ejemplo:

$$A = \{x \in U : \text{x es un número par comprendido entre 2 y 4}\} = \emptyset$$

- Conjunto Universal: Llamaremos conjunto universal a aquel conjunto que contiene todos los elementos del tema en estudio, y lo simbolizaremos con $U$.

- Conjunto unitario: Llamaremos conjunto unitario a aquel conjunto que tiene sólo un elemento. Por ejemplo,

$$B = \{5\}$$

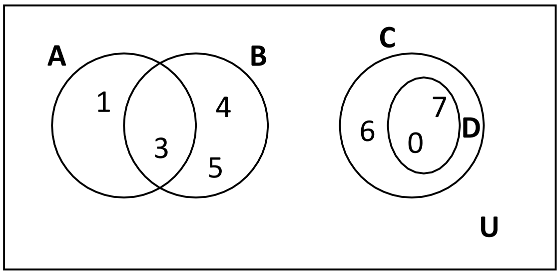
## Diagrama de Venn

Los diagramas de Venn sólo se utilizan para representar gráficamente conjuntos finitos. No importa el orden en el cual los elementos del conjunto se colocan.

<u>Ejemplo</u>

Aquí se puede mencionar que:

$A = \{1{,}3\}$ ; $B = \{3{,}4{,}5\}$ ; $C = \{0{,}6{,}7\}$ ; $D = \{7{,}0\}$




Además, se observa que:

- Los conjuntos $A, B, C, D$ están "dentro" del conjunto $U$. Y el conjunto $D$ está "dentro" del conjunto $C$. ¿Cómo podemos simbolizar este vínculo entre conjuntos?

- También podemos mencionar que 1 es elemento del conjunto $A$, pero no lo es del conjunto $B$, ¿cómo simbolizamos este vínculo entre elemento y conjunto?

## Algunos símbolos lógicos

- Pertenencia e inclusión

| **Símbolo** | **Se lee como…** |
|---|---|
| $\boldsymbol{x \in C}$ | “el elemento $\boldsymbol{x}$ pertenece al conjunto $\boldsymbol{C}$” |
| $A \subseteq B$ | “$A$ es subconjunto de $B$”<br>“$A$ está contenido en $B$”<br>“$B$ contiene al conjunto $A$”<br>Significa que: todo elemento de $A$ es elemento de $B$ |

Nota: Si se escribe que $A \subset B$ implica que no todo elemento de $B$, es parte de $A$.

Observación:

- Si se quiere señalar que un elemento no forma parte de un conjunto, se escribe lo siguiente: $x \notin A$
- Y si, no todo elemento de un conjunto $A$, es elemento de $B$, se escribe: $A \nsubseteq B$

La **pertenencia** vincula **elementos** con **conjuntos** y
la **inclusión** vincula **conjuntos** con **conjuntos.**

Ejercicio: Teniendo en cuenta el diagrama de Venn anteriormente graficado, podemos escribir:

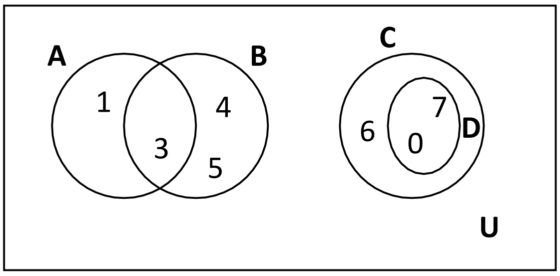
$$A \subseteq U \ ; \ B \subseteq U \ ; C \ \subseteq U \ ; \ D \subseteq U$$

Completar con el símbolo correspondiente:

$A$ _____ $B$ ; $C$ ________ $D$ ; $B$ ______ $A$

3 ______ $B$ ; 7 ________ $D$

$U =$ ______________________________




¿Qué elementos tienen en común $A$ y $B$? ¿Qué nombre recibe el conjunto obtenido?

- Repasamos símbolos a tener en cuenta

| **Símbolo** | **Se lee como…** |
|---|---|
| $\forall$ | “cualquiera sea” o “para todo” |
| $\exists$ | “existe” o “existe al menos uno” |
| $\Rightarrow$ | “implica” o “entonces” |
| $\wedge$ | “y” |
| $\vee$ | “o” |

## Conjuntos numéricos y su representación

Los conjuntos numéricos son agrupaciones de números que comparten características comunes y son fundamentales en el estudio de las matemáticas. Cada conjunto tiene propiedades específicas que permiten su uso en distintas áreas, desde la aritmética básica, hasta el cálculo avanzado. Los principales conjuntos numéricos son los números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales, cada uno de los cuales amplía nuestro entendimiento y capacidad para representar cantidades y resolver problemas.

### NÚMEROS NATURALES

Los **números naturales** son aquellos números que se utilizan para contar y es un conjunto que se simboliza con $\mathbb{N}$.

Nota

- El cero, no es un número natural. Podemos mencionar que el primer elemento de los números naturales es el 1, sin embargo no tiene último elemento. Mencionamos algunos:

$$1, 2, 3, 4, \dots \ , 145, 146, \dots$$

  Por ser un conjunto infinito, no se puede escribir por extensión.
- Al conjunto de los naturales con el cero incluido, se simboliza con $\mathbb{N}_0$

### NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de los **números enteros**, está formado por los naturales negativos, el cero y los números naturales. Se lo simboliza con $\mathbb{Z}$.

Dado que es un conjunto infinito, no se lo puede escribir por extensión. Este conjunto no tiene ni primer ni último elemento (por eso los puntos suspensivos al inicio y al final), mencionamos algunos:

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

### NÚMEROS RACIONALES

Un **número racional** es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$ donde $a$ y $b$ son números enteros, tal que $b \neq 0$. Se llaman numerador y denominador, respectivamente. Formalmente, el conjunto de los números racionales se denota como:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, con\ b \neq 0\right\}$$

Nota: Se puede mencionar que todo número que se puede escribir como fracción, es un número racional. Por esto, los números racionales contienen al conjunto de los números naturales, a los enteros y todo decimal con,

- Cantidad finita de cifras decimales
- Números decimales periódicos

- **NÚMEROS IRRACIONALES**

Los **números irracionales** son aquellos con infinitas cifras decimales no periódicas. Un número irracional no se puede expresar como fracción. Formalmente, el conjunto de los números irracionales se denota:

$$\mathbb{I} = \{x \in U : x \text{ no se puede expresar como fracción}\}$$

Nota: el conjunto de los números racionales e irracionales no tienen elementos en común (se les dice disjuntos). Por tanto, un número racional no podrá ser irracional, y viceversa.

Ejemplos:

$$\pi = 3{,}14159265 \ldots$$

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356 \ldots$$

$$e = 2{,}71828182846 \ldots$$

- **NÚMEROS REALES**

El conjunto de los **números reales** está formado por la unión de los números racionales con los números irracionales. Formalmente se denota:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Nota: El símbolo "∪" denota la unión de conjuntos, operación que será trabajada con mayor profundidad en la próxima sección.

Con el siguiente esquema, se puede notar la relación de inclusión entre los conjuntos numéricos estudiados.

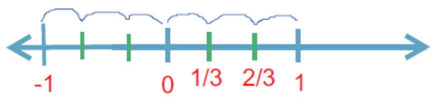
$$\mathbb{R}\ (Reales) \begin{cases} \mathbb{Q}\ (Racionales) \begin{cases} \mathbb{Z}\ (Enteros) \begin{cases} \mathbb{N}\ (Naturales) \\ Cero \\ \mathbb{N}^-\ (Naturales\ negativos) \end{cases} \\ Números\ Fraccionarios \end{cases} \\ \mathbb{I}\ (Irracionales) \end{cases}$$

**¿Cómo representar números reales?**

Los números reales se representan geométricamente en la recta numérica, esto es, se indica sobre una recta un punto fijo O que se llama origen y que corresponde al número real cero. Considerando un segmento unitario como unidad de medida, a la derecha de O se indican los puntos que corresponden a los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$) y a la izquierda de O los puntos que corresponden a los números reales negativos ($\mathbb{R}^-$). Siendo:

De esta manera, a cada número real le corresponde un único punto de la recta, y a cada punto de la recta, un único número real. Para representar gráficamente un número fraccionario en la recta numérica, se divide la unidad en tantas partes como lo indique el denominador de la fracción y luego se toman tantas partes de la subdivisión como lo indique el numerador.

Ejemplo:




Nota:

- Si se quiere representar un conjunto numérico finito en la recta numérica, entonces sobre cada número en la recta se marca dicho punto (tantos puntos como elementos tenga el conjunto).
- Si se quiere representar un conjunto infinito, se debe pintar (sombrear) sobre la recta, todo lo que contenga a dichos numéros (lo veremos en detalle con los intervalos).

## ▪ NÚMEROS COMPLEJOS

Al intentar resolver algunas igualdades, puede suceder:

$$x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -4$$

Pero en el conjunto de los números reales, no existe ningún número tal que al elevarlo al cuadrado nos dé por resultado un número negativo. De aquí surgen los números complejos (imaginarios), que denotamos con: $\mathbb{C}$

Definimos primero la **unidad imaginaria:**

$$\boldsymbol{i = \sqrt{-1}}$$

Y es tal que: $i^2 = -1$

Algunos ejemplos:

- Serán números imaginarios puros: $-2i$ ; $3i$ ; $\frac{1}{2}i$

  Donde los coeficientes $-2, 3, \frac{1}{2}$ se denominan parte imaginaria del número complejo.

- Los números complejos se expresan en general como: $\boldsymbol{a + bi}$ siendo $a, b \in \mathbb{R}$. Se llaman "$a$" parte real y "$b$" parte imaginaria. Ejemplos:

  $$2 + 3i \quad ; \quad \frac{1}{3} - 5i \quad ; \quad 9$$

  ¿Qué ocurre en el tercer ejemplo? La parte imaginaria es cero. Lo cual nos lleva a mencionar que:

  "Todo número real, es un número complejo"

  En símbolos:

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

<u>Ejercicio</u>: Completar en el siguiente cuadro con una cruz, en las celdas correspondientes.

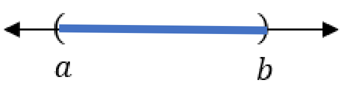
| Número | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{I}$ | $\mathbb{R}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | | | | | |
| $\sqrt{2}$ | | | | | |
| $\frac{2}{5}$ | | | | | |
| $-5$ | | | | | |
| $4{,}521$ | | | | | |
| $-2{,}9999\ldots$ | | | | | |

## Intervalos

Un intervalo es un subconjunto de números reales, que puede ser **abierto, cerrado, semiabierto (o semicerrado).** Antes de definirlos, es conveniente repasar la lectura de las desigualdades:

| Símbolo | Se lee… |
|---|---|
| $\leq$ | Menor o igual que |
| $<$ | Menor que |
| $\geq$ | Mayor o igual que |
| $>$ | Mayor que |

Definimos ahora los intervalos.

| Nombre | Símbolo | Significado | Representación |
|---|---|---|---|
| **Intervalo abierto** “no incluye sus extremos” | $(a, b)$ | $x \in (a, b) \Leftrightarrow a < x < b$ |   |
| **Intervalo cerrado** “incluye sus extremos” | $[a, b]$ | $x \in (a, b) \Leftrightarrow a \leq x \leq b$ |   |
| **Intervalo semiabierto** | $(a, b]$ | $x \in (a, b) \Leftrightarrow a < x \leq b$ |   |
| | $[a, b)$ | $x \in (a, b) \Leftrightarrow a \leq x < b$ |   |
| **Intervalo infinito** | $(-\infty, a)$ | $x \in (-\infty, a) \Leftrightarrow x < a$ |   |

| | | | |
|---|---|---|---|
| "en alguno de sus extremos aparece el símbolo ∞" | $(-\infty, a]$ | $x \in (-\infty, a) \Leftrightarrow x \leq a$ |   |
| | $(a, \infty)$ | $x \in (a, \infty) \Leftrightarrow x > a$ |   |
| | $[a, \infty)$ | $x \in (a, \infty) \Leftrightarrow x \geq a$ |   |

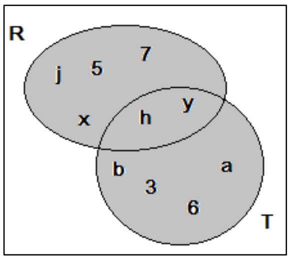
## Operaciones entre conjuntos

| Operación | Definición |
|---|---|
| Unión | $A \cup B = \{x \in U: \ x \in A \ \ \vee \ x \in B\}$ |
| Intersección | $A \cap B = \{x \in U: \ x \in A \ \ \wedge \ \ x \in B\}$ |
| Diferencia | $A - B = \{x \in U: \ x \in A \ \ \wedge \ \ x \notin B\}$ |
| Complemento | $\bar{A} = \{x \in U: \ \ x \notin A\}$ |

Observación:

- Si ocurre que $A \cap B = \emptyset$ entonces se dice que los conjuntos son **disjuntos**. Significa que no tienen elementos en común.
- Para determinar el complemento de un conjunto, es necesario conocer el universo sobre el cual se trabaja. En caso de estar trabajando con conjuntos numéricos, si el universo no está especificado, asumimos que $U = \mathbb{R}$.

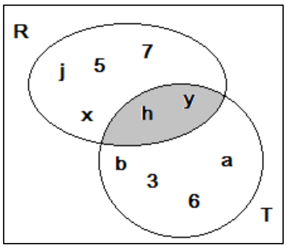
Ejemplos:




1) Sean los conjuntos $R = \{j, 5,7, x, h, y\}$ y $T = \{h, y, b, 3,6, a\}$ dispuestos en un Diagrama de Venn como muestra en la figura. Por definición se sabe que la unión contiene todos los elementos que están en $R$ o en $T$, entonces:

$$R \cup T = \{j, 5,7, x, h, y, b, 3,6, a\}$$

2) Si $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \mathbf{9}\}$ y $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{5}, \mathbf{10}, \sqrt{\mathbf{2}}, \mathbf{1}\}$ entonces $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \mathbf{9}, \mathbf{10}, \sqrt{\mathbf{2}}\}$.




3) Se observan los mismos conjuntos dados anteriormente, representados en el diagrama de Venn $R = \{j, 5{,}7, x, h, y\}$ y $T = \{h, y, b, 3{,}6, a\}$. Entonces $R \cap T = \{h, y\}$.

   Lo que está pintado corresponde a la intersección de los conjuntos, determinada por todos los elementos que los conjuntos $R\ y\ T$ poseen en común.

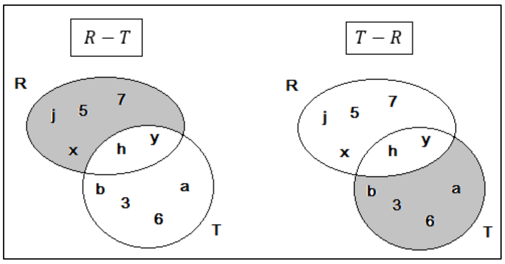
4) Dados $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \mathbf{9}\}$ y $\boldsymbol{B} = \{\mathbf{5}, \mathbf{10}, \sqrt{\mathbf{2}}, \mathbf{1}\}$ entonces resulta que $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{\mathbf{1}, \mathbf{5}\}$.

5) Dados $R = \{j, 5{,}7, x, h, y\}$ y $T = \{h, y, b, 3{,}6, a\}$, se sabe por definición, que la diferencia entre los conjuntos $R$ y $T$ en este caso está definida como:
   $R - T$: "todos los elementos que están en R y no en T"
   $T - R$: "todos los elementos que están en T y no en R"

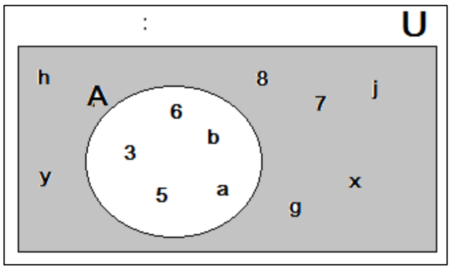
   Entonces en este caso:

   $R - T = \{j, 5{,}7, x\}$ y $T - R = \{b, 3{,}6, a\}$

   Notar que: $\boldsymbol{R - T \neq T - R}$.




6) Dado el conjunto $A = \{6{,}3, b, 5, a\}$, que verifica $A \subseteq U$, siendo $U$ el universo, se dice que $\bar{A} = \{h, y, 8{,}7, j, g, x\}$.



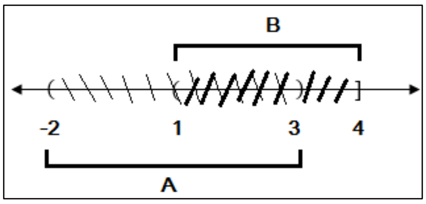

## Propiedades de operaciones entre conjuntos

| | |
|---|---|
| **Conmutativa** | $A \cap B = B \cap A$<br>$A \cup B = B \cup A$ |
| **Asociativa** | $A \cup (B \cup C)) = (A \cup B) \cup C$<br>$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |
| **Distributiva** | $A \cup (B \cap C)) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$<br>$A \cap (B \cup C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| **Idempotencia** | $A \cap A = A$<br>$A \cup A = A$ |
| **Leyes de De Morgan** | $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$<br>$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ |

Veamos a continuación, algunos ejemplos de operaciones entre conjuntos numéricos dados por intervalos.

*Resolveremos las operaciones entre conjuntos, siempre en forma GRÁFICA. Por tanto, se debe acompañar la resolución con la gráfica en la recta real para justificar las respuestas.*

Dados los intervalos, $A = (-2, 3\,)$ $y$ $B = (1,\ 4]$, se los representa en la recta real y "se pintan" cada uno de los intervalos de formas distintas (o distintos colores). Luego se observa gráficamente:




- La unión como "todo lo que queda pintado", en este caso: $A \cup B = (-2,\ 4]$
- La intersección, dado por lo común a ambos intervalos, es decir, $A \cap B = (1,3)$
- La diferencia: $A - B = (-2, 1]$ y a su vez $B - A = [3, 4]$
- Complemento: siendo $U = \mathbb{R}$ entonces, $\bar{A} = (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$

***¿Cuándo un conjunto puede ser expresado como intervalo?***

Para esto debemos tener en cuenta dos aspectos. En primer lugar, **el conjunto debe ser un subconjunto de los números reales**, y a su vez, **contener infinitos elementos**. Analizar estos aspectos y ponerlo en práctica con el siguiente ejercicio.

Ejercicio: Dados los siguientes conjuntos,

$$A = \{x \in \mathbb{Z}:\ -3 < x \leq 1\}\ ;\quad B = \{x \in \mathbb{N}:\ -1 < x < 3\}\ ;$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}: x\ es\ par\ \ \wedge\ -2 < x \leq 8\}\ ;\quad S = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x \leq 6\}\ ;\quad F = \{x \in \mathbb{R}: x > 6\}$$

a) Escribir por extensión o como intervalo cada conjunto, según corresponda.

b) Resolver las siguientes operaciones,

$S \cap F =$ ______ ; $A \cup B =$ ___________ ; $S \cup F =$ ___________ ; $C \cap B =$ __________

c) ¿Hay conjuntos que sean disjuntos? Compare dos a dos.

## Operaciones entre números reales

### SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

- **Mismo denominador:** Para **sumar** (o **restar**) fracciones con el **mismo denominador**, se suman (o restan) los numeradores y se escribe el mismo denominador.

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}} \pm \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$$

Ejemplos:

$$\frac{1}{5}+\frac{6}{5}=\frac{1+6}{5}=\frac{7}{5} \qquad \frac{8}{3}-\frac{6}{3}=\frac{8-6}{3}=\frac{2}{3}$$

- **Distinto denominador:** Para sumar (o restar) fracciones con distinto denominador, podemos emplear dos formas:
  - Se reemplazan las fracciones por fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Para encontrar un denominador común, se busca el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores.
  - Se encuentra el mcm, y se procede como se indica a continuación:

*se multiplica*

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{(m:b)\cdot a\pm(m:d)\cdot c}{m}} \qquad \boldsymbol{m=mcm(b,d)}$$

*se divide*

Ejemplo: Se deja como ejercicio el cálculo del $mcm(4,10)$

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{10}=\frac{15+2}{20}=\frac{17}{20}$$

## MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

Para **multiplicar** dos o más fracciones, se multiplican entre si los numeradores y los denominadores. Antes de realizar la operación, primero debemos simplificar cruzado (cualquier numerador con cualquier denominador).

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\cancel{2}\cdot 1}{3\cdot\cancel{4}}=\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{12}_{6}}=\frac{1}{6}$$

## DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para dividir dos fracciones, se puede hacer de dos formas.

1°) Se multiplica el numerador de la primera con el denominador de la segunda y se coloca en el numerador del resultado (flechas azules), luego se multiplica el denominador de la primera con el numerador de la segunda y se coloca en el denominador del resultado (flechas naranjas).

Antes de realizar la operación simplificar derecho (denominador con denominador, o bien, numerador con numerador), también cada fracción por separado:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \cdot \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}}$$

2°) Transformar la división en una multiplicación, y desde allí se siguen los pasos detallados para multiplicar.

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} : \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \cdot \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}}$$

**Propiedades de las operaciones**

| Propiedad | Ejemplo |
|---|---|
| Conmutativa de la suma<br>$a + b = b + a$ | $2 + 3 = 3 + 2$ |
| Asociativa de la suma.<br>$(a + b) + c = a + (b + c)$ | $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$ |
| Distributiva del producto respecto de la suma.<br>$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$<br>$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ | $(2 + 3) \cdot 5 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5$<br>$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ |
| Distributiva del cociente respecto de la suma.<br>$(a + b) : c = a : c + b : c$<br>También se escribe como:<br>$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ | $(8 + 4) : 2 = 8 : 2 + 4 : 2$<br>O bien,<br>$\frac{8 + 4}{2} = \frac{8}{2} + \frac{4}{2}$ |

## POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN DE FRACCIONES

Para aplicar potenciación (radicación) en fracciones se distribuye la potencia (raíz) en el numerador y el denominador.

$$\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}} \qquad \text{y} \qquad \sqrt[\boldsymbol{n}]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{b}}}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25} \qquad \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}} = \frac{7}{4}$$

## Propiedades de la potencia y raíz

| Propiedad | Ejemplo |
|---|---|
| $a^0 = 1 \quad , a \neq 0$ | $(-5)^0 = 1$ |
| $0^n = 0 \quad , \quad n \neq 0$ | $0^{-3} = 0$ |
| $a^1 = a$ | $4^1 = 4$ |
| $1^n = 1$ | $1^5 = 1$ |
| $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ | $3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$ |
| $a^n : a^m = a^{n-m}$ | $4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2$ |
| $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ | $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$ |
| $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ | $(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$ |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$ |
| $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ | $(-7)^{-3} = \left(-\frac{1}{7}\right)^3 = -\frac{1}{343}$ |
| $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ | $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{25} = 5$ |
| $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ | $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$ |
| $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ | $\sqrt[3]{4^6} = 4^{\frac{6}{3}} = 4^2 = 16$ |

Observación: La potencia o raíz de una suma o resta **NO** es distributiva. La forma correcta de resolver estos casos es la siguiente:

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \qquad o \qquad \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$$

$$(2+3)^2 = 5^2 = 25 \qquad o \qquad (7-4)^2 = 3^2 = 9$$

Estos cálculos anteriores **NO** se puede resolver de la siguiente forma:

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7 \qquad o \qquad \sqrt{25-16} = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$$

$$(2+3)^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \qquad o \qquad (7-4)^2 = 7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33$$

## Ejercicios combinados

Para resolver ejercicios combinados, es muy importante haberse apropiado de todas las propiedades de las operaciones con números reales estudiadas.

No olvidar en primer lugar separar en términos, y luego resolver todas las operaciones dadas en cada término, para finalmente sumar y/o restar lo obtenido en cada término.

Nota: Si bien el uso de la calculadora estará permitido en la evaluación, deben dejar constancia de los cálculos auxiliares al costado de la hoja para validar el ejercicio. Observar a modo de ejemplo el siguiente desarrollo.

Ejemplo: Resolver el siguiente ejercicio combinado.

$$3^{-2}+\left(\frac{7}{6}\right)^{9}:\left(\frac{7}{6}\right)^{8}-\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{6}{11}+\frac{34}{121}}=$$

$$\frac{1}{9}+\frac{7}{6}-\left(\frac{11}{10}\right)\cdot\sqrt{\frac{100}{121}}=$$

$$\frac{1}{9}+\frac{7}{6}-\frac{11}{10}\cdot\frac{10}{11}=$$

$$\frac{1}{9}+\frac{7}{6}-1=$$

$$\frac{2+21-18}{18}=\mathbf{\frac{5}{18}}$$

$$3^{-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=\frac{1^2}{3^2}=\frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{7}{6}\right)^{9}:\left(\frac{7}{6}\right)^{8}=\left(\frac{7}{6}\right)^{9-8}=\left(\frac{7}{6}\right)^{1}=\frac{7}{6}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{2}=\frac{6+5}{10}=\frac{11}{10}$$

$$\frac{6}{11}+\frac{34}{121}=\frac{66+34}{121}=\frac{100}{121}$$

*Queda como ejercicio el cálculo del mcm entre 5 y 2 ; y entre 11 y 121*

$$\sqrt{\frac{100}{121}}=\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{121}}=\frac{10}{11}$$

$$\begin{array}{cc|c} 9 & 6 & 2 \\ 9 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

$$mcm(9{,}6)=2.3.3=18$$

# UNIDAD 2 – ECUACIONES. INECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

## 1. ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas, en la cual intervienen ciertas variables. Algunas son ciertas para todo valor que se asigne a la o las variables que intervienen en ellas, y decimos en este caso que se trata de una identidad. Por ejemplo:

$$3(x+5) = 3x + 15$$

Lo cual reconocemos como válido para todo $x \in \mathbb{R}$ pues se aplicó en este caso la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

Sin embargo, hay otras igualdades que se verifican para algún o algunos valores, y en este caso hablamos de ecuaciones. Haciendo cierto abuso del lenguaje, hablamos de que, para resolver una ecuación, se deben hacer "pasajes de término, factores" hasta lograr despejar la variable.

### Ecuaciones de primer grado

Una **ecuación de primer grado** o lineal está dada por $\boldsymbol{ax + b = 0}$ **;** siendo $a$ y $b$ números reales y $a \neq 0$. Es importante destacar que en la misma, la potencia de variable $x$ es uno.

Ejemplos:

a) Resolver: $5x - 2 = 6$

$$5x - 2 = 6$$
$$5x = 6 + 2$$
$$x = \frac{3}{5}$$

b) Resolver: $2(x-1) = \frac{4x+3}{5}$

$$2(x-1) = \frac{4x+3}{5}$$
$$2x - 2 = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}$$
$$2x - \frac{4}{5}x = \frac{3}{5} + 2$$
$$\frac{6}{5}x = \frac{13}{2}$$
$$x = \frac{13}{2} : \frac{6}{5}$$
$$x = \frac{65}{12}$$

## Ecuaciones de segundo grado

Una **ecuación de segundo grado**, también llamada "cuadrática" es aquella cuya forma general está dada por $\boldsymbol{ax^2+bx+c\ =\ 0}$ **;** siendo $a$, $b$ y $c$ números reales y $a\ \neq\ 0$.

Llamamos: $a$ (coeficiente cuadrático) ; $b$ (coeficiente lineal) ; $c$ (término independiente)

En general, de una ecuación cuadrática la variable no puede ser despejada, salvo en el caso de que $b=0$, como por ejemplo:

$$x^2-9=0$$

Pero aún así, tampoco estaríamos en condiciones de resolverlo, porque en este paso se debe tener en cuenta una importante propiedad con valor absoluto que aún no es trabajada. Por tanto, ¿cómo resolver una ecuación cuadrática?

FÓRMULA DE BHASKARA

Para resolver una ecuación cuadrática aplicamos la fórmula de Bhaskara que se muestra a continuación:

$$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}}$$

*Para poder aplicar esta fórmula, se deben identificar los valores de los coeficientes $a$, $b$, $c$ por lo cual, el primer paso es igualar a cero la expresión, ordenarla y después resolver.*

Antes de aplicar la fórmula para resolver la ecuación, estudiaremos el discriminante de una ecuación cuadrática, lo cual nos aporta información acerca de la solución de la misma, puesto que puede ocurrir que tanga 2 soluciones reales y distintas, una solución real (se dice doble) o bien, dos raíces imaginarias.

El discriminante está dado, justamente por la expresión del radicando, esto es:

$$\boldsymbol{\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c}$$

Donde:

- Si $\Delta>0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.
- Si $\Delta=0$ tiene una única solución real.
- Si $\Delta<0$ no tiene solución real (hay dos raíces complejas conjugadas)

Ejemplo: Resolver la ecuación cuadrática $x^2-5x=-6$.

En primer lugar, igualamos a cero $x^2-5x+6=0$ y ahora identificamos:

$$a=1\ ;b=-5\ ;c=6$$

Luego, calculamos el discriminante: $\boldsymbol{\Delta}=(-5)^2-4.1.6=1>0$ con lo cual observamos que hay dos raíces reales y distintas. Las calculamos:

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2.1}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2} \begin{array}{l} \nearrow\ x_1=\dfrac{5+1}{2}=3 \\ \searrow\ x_2=\dfrac{5-1}{2}=2 \end{array}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Como ya está ordenada: $a = 1$ , $b = -2$ , $c = 2$ . Luego se analiza el discriminante:

$$\boldsymbol{\Delta = (-2)^2 - 4.1.2 = 4 - 8 = -4 < 0}$$

Tiene dos raíces complejas. Lo resolvemos:

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2.1} = \frac{2 \pm 2i}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + i \\ x_2 = 1 - i \end{cases}$$

## Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

En primer lugar, vamos a trabajar con la definición de logaritmo:

$$\boldsymbol{\log_a(b) = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b}$$

Siendo:

- $a$ la base del logaritmo, con $a \neq 1$
- $b$ el argumento del logaritmo, con $b > 0$

Ejemplos:

a) $\log_2(8) = 3$ pues $2^3 = 8$
b) $\log(-5)$ no existe, pues el argumento no puede ser negativo
c) $\log_3(0)$ no existe, porque el argumento no puede valer cero

**CASOS ESPECIALES Y CAMBIO DE BASE**

- **Logaritmo decimal:** es el caso en el cual $a = 10$ y se escribe,

$$\log_{10}(b) = \log(b)$$

  Lo cual implica, que si la base del logaritmo se omite, significa que la misma es 10.

- **Logaritmo natural** (o neperiano): es el caso en el cual $a = e$ y se escribe,

$$\log_e(b) = \ln(b)$$

  Nota: la calculadora, tiene dos teclas especialmente para estos logaritmos, una es la tecla **log** (para el decimal) y la otra **ln** (para el natural).

  Practicar calculando:

$$\log(25) = \qquad ; \quad \ln(9) = \qquad ; \quad \log(9{,}2) =$$

***¿Qué ocurre si se quiere calcular un logaritmo en otra base?***

Algunas calculadoras tienen un comando especial para esto, pero en la mayoría de los casos se trabaja con un cambio de base, a partir de cualesquiera de las siguientes formas:

$$\log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)} \quad \Rightarrow \text{ Transformando a logaritmo decimal}$$

$$\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \quad \Rightarrow \text{ Transformando a logaritmo natural}$$

Ejercicio: Practicar con la calculadora:

a) $\ln(5) =$

b) $\log(127) =$

c) $\log_6(25) =$

d) $\log_2(-4) =$

e) $\log(0) =$

f) $\log_7(100) =$

**PROPIEDADES DE LOGARITMOS**

Son muy importantes al momento de resolver una ecuación logarítmica:

- $\log_a(x) = \log_a(y) \Rightarrow x = y$
- $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$
- $\log_a(a) = 1$
- $a^{\log_a(x)} = x$
- $\log_a(a^x) = x$
- $\ln(e) = 1$

**ECUACIONES LOGARITMICAS**

Las **ecuaciones logarítmicas** son aquellas en las que la incógnita aparece afectada por un logaritmo.

Ejemplo: Resolver $\log_2(x+1) + 5 = 10$

- Primero se "despeja" la expresión que contiene al logaritmo, luego usamos la definición o propiedades.

$$\log_2(x+1) + 5 = 10$$

$$\log_2(x+1) = 10 - 5$$

$$\log_2(x+1) = 5$$

$$2^5 = x + 1$$

$$32 - 1 = x$$

$$31 = x$$

Otra forma de resolver esta ecuación, es haciendo uso de expresiones exponenciales, lo analizamos luego de definir dichas ecuaciones.

**ECUACIONES EXPONENCIALES**

Una **ecuación exponencial** es aquella en la cual la incógnita, aparece en el exponente.

Para resolver una ecuación exponencial, deberíamos tener en cuenta:

- Propiedades de logaritmos antes vistas
- Propiedades de potencias
- $a^x = a^y \Longrightarrow x = y$ [a bases iguales, exponentes coinciden]

Ejemplo: Resolver $4^{3x-1} = 16$

Una forma de resolver, es intentar escribir una igualdad en la cual haya una potencia en cada miembro, cuyas bases coincidan (esto no siempre es posible), y se aplica la propiedad anterior:

$$4^{3x-1} = 16$$

$$4^{3x-1} = 4^2$$

$$3x - 1 = 2$$

$$3x = 2 + 1$$

$$x = \frac{3}{3}$$

$$x = 1$$

Otra forma: En caso de que obtener igualdad entre las mismas bases, no sea posible, se puede aplicar el logaritmo de la misma base, miembro a miembro. A continuación se muestra la resolución de la misma ecuación anterior. La ventaja es que aplicar logaritmo en la misma base, siempre es posible, pero lo resuelto en la primera forma, no se puede lograr en todos los casos.

$$4^{3x-1} = 16$$

$$\log_4(4^{3x-1}) = \log_4(16)$$

$$\boxed{\log_a(a^x) = x}$$

$$3x - 1 = 2$$

$$3x = 2 + 1$$

$$x = \frac{3}{3}$$

$$x = 1$$

Comprobamos que da exactamente el mismo resultado.

Ejemplo: Resolver $2.e^{5x} = 18$

Aquí cuidado, no se puede aplicar logaritmo hasta tanto la expresión exponencial quede despejada:

$$2.e^{5x} = 18$$

$$e^{5x} = \frac{18}{2}$$

$$e^{5x} = 9$$

$$\ln(e^{5x}) = \ln(9)$$

$$5x = \ln(9)$$

$$x = \frac{\ln(9)}{5} \approx 0{,}44$$

## 2. DESIGUALDADES E INECUACIONES

Una **desigualdad** es una expresión matemática que contiene cualquiera de los siguientes signos: $\leq, \geq <, >$

Las i**necuaciones** son **desigualdades algebraicas** en la que sus dos miembros se relacionan por uno de estos signos:

| Desigualdad | Se lee | Ejemplo de inecuación |
|---|---|---|
| $<$ | **menor que** | $\mathbf{2x - 1 < 7}$ |
| $\leq$ | **menor o igual que** | $\mathbf{2x - 1 \leq 7}$ |
| $>$ | **mayor que** | $\mathbf{2x - 1 > 7}$ |
| $\geq$ | **mayor o igual que** | $\mathbf{2x - 1 \geq 7}$ |

La **solución** de una **inecuación,** si la hay, es el conjunto de valores de la variable que la verifica, se puede expresar mediante un intervalo en algunos casos y graficar en la recta numérica.

Notas:

- En general una inecuación tiene ***infinitas*** soluciones.
- El ***grado*** de las inecuaciones se define como el de las ecuaciones.
- **Resolver** una inecuación implica hallar los valores que deben tomar sus variables para que se cumpla la desigualdad.
- **Al resolver una inecuación, cuando se multiplica o divide miembro a miembro por un número negativo, la desigualdad se invierte.**

Ejemplo: Resolver $2x - 1 < 7$

$$2x - 1 < 7$$

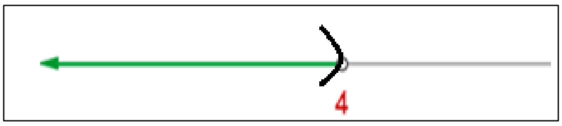
$$2x < 7 + 1$$

$$x < \frac{8}{2}$$

$$x < 4$$

Solución: $S = (-\infty, 4)$

Gráficamente:



Ejemplo: Resolver $2x - 1 > 7$

$$2x - 1 > 7$$

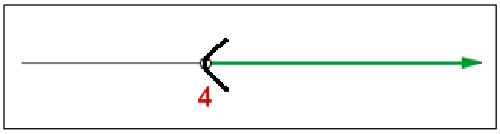
$$2x > 7 + 1$$

$$x > \frac{8}{2}$$

$$x > 4$$

Solución: $S = (4, \infty)$

Gráficamente:




Ejemplo: Resolver $2x - 1 \geq 7$

$$2x - 1 \geq 7$$

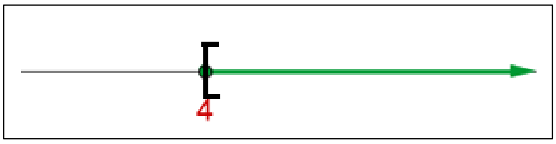
$$2x \geq 7 + 1$$

$$x \geq \frac{8}{2}$$

$$x \geq 4$$

Solución: $S = [4, \infty)$

Gráficamente:




Ejemplo: Resolver $-2 < x + 1 \leq 5$

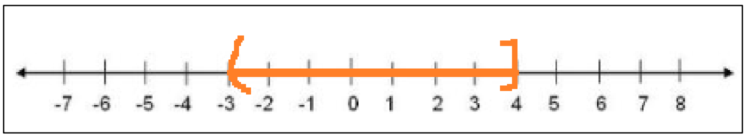
$$-2 < x + 1 \leq 5$$

$$-2 - 1 < x \leq 5 - 1$$

$$-3 < x \leq 4$$

Solución: $S = (-3,4]$

Graficamente:




## 3. ECUACIONES E INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Dado un número real $\boldsymbol{x}$, se llama **valor absoluto de x,** y se simboliza | $x$ | al número real positivo que dado por:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Lo cual es exactamente la distancia del número $x$ al cero. Por lo cual, siempre es positivo el resultado.

Ejemplos:

a) $|8| = 8$  b) $|-3| = -(-3) = 3$  c) $|0| = 0$

**PROPIEDADES**

a) $|x| = a$ si y sólo si $x = a \vee x = -a$

b) $|x| \leq a$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$

c) $|x| \geq a$ si y sólo si $x \leq -a \vee x \geq a$

d) $\sqrt{x^2} = |x|$ **(IMPORTANTE)**

e) $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

f) $|x.y| = |x|.|y|$

g) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

También son válidas:

$|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$

$|x| > a$ si y sólo si $x > -a \vee x > a$

Nota: La propiedad d) es válida para cualquier exponente/índice PAR.

Ejemplos: Resolver cada una de las siguientes ecuaciones o inecuaciones, escribiendo luego de ser posible, el conjunto solución como intervalo.

Ejemplo 1: $|5x - 2| = 3$

R// Puede ocurrir por definición que: $5x - 2 = 3 \quad \vee \quad 5x - 2 = -3$

$$5x = 5 \quad \vee \quad 5x = -1$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{5}$$

Por lo tanto esta ecuación tiene dos posibles soluciones $S = \left\{1, -\frac{1}{5}\right\}$.

Ejemplo 2: $|7x - 4| + 2 = 0$

R// En este caso antes de aplicar la definición se realiza un paso previo, obteniendo:

$$|7x - 4| = -2 \quad \text{(Absurdo!!)}$$

Sin necesidad de realizar de realizar más cálculos, se observa que independientemente de cuál sea el valor de $x$ en esta ecuación, por la definición el valor absoluto de cualquier número, se sabe que es SIEMPRE POSITIVO. Por lo tanto, dicha ecuación no tiene solución.

Ejemplo 3: $|6x - 3| = |2x + 1|$

R// Recordando la propiedad de valor absoluto, se puede decir que,

$$6x - 3 = 2x + 1 \quad \vee \quad 6x - 3 = -(2x + 1)$$

$$4x = 4 \quad \vee \quad 8x = 2$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 1/2$$

Es decir, se tiene otro ejemplo de otra ecuación que tiene dos posibles soluciones $S = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$.

Ejemplo 4: $|4x+2|-6=8$,

R// Trabajando algebraicamente $|4x+2|=14$. Usando la definición:

$$4x+2=14 \ \vee \ 4x+2=-14$$
$$4x=12 \ \vee \ 4x=-16$$
$$x=3 \ \vee \ x=-4$$

Luego, tenemos dos soluciones posibles: $S=\{3,-4\}$.

Ejemplo 5: $|x-1|<3$

Por propiedad:
$$-3<x-1<3$$
$$-3+1<x<3+1$$
$$-2<x<4$$

Luego, $S=(-2,4)$

Ejemplo 6: $|x+2|\geq 2$

Por propiedad:
$$x+2\leq -2 \ \vee \ x+2\geq 2$$
$$x\leq -2-2 \ \vee \ x\geq 2-2$$
$$x\leq -4 \ \vee \ x\geq 0$$

Finalmente, $S=(-\infty,-4]\cup[0,\infty)$

Ejemplo 7: $4+2|3x-6|<6$.

R// Para poder aplicar la propiedad conocida, primero se trabaja algebraicamente, obteniendo,

$$|3x-6|<1$$
$$-1<3x-6<1$$
$$5<3x<7$$
$$\frac{5}{3}<x<\frac{7}{3}$$

Se obtiene en este caso como solución un intervalo de números reales: $S=\left(\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$.

Ejemplo 8: $\left|\frac{x-10}{7}\right|\leq 5$.

R// Usando la propiedad: $-5\leq\frac{x-10}{7}\leq 5 \ \Rightarrow \ -35\leq x-10\leq 35 \ \Rightarrow \ -25\leq x\leq 45$

Luego: $S=[-15,45]$ es la solución.

## 4. SISTEMAS DE ECUACIONES

Consideremos la siguiente situación:

*“El doble del número x, más el número y, es igual a* 7*. La diferencia entre x e y es igual a* 2*”*

**La traducción al lenguaje simbólico de la situación planteada es:** $\begin{cases}\mathbf{2x+y=7}\\ \mathbf{x-y=2}\end{cases}$

Lo que se acaba de escribir, representa un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, lo definiremos de la siguiente forma:

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un par de ecuaciones lineales que se suelen representar de la siguiente forma: $\begin{cases} \boldsymbol{a_1x + b_1y = c_1} \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y = c_2} \end{cases}$

Donde:

- $x, y$ son las **incógnitas**
- $a_1, b_1, a_2, b_2$ son números reales llamados **coeficientes**
- $c_1, c_2$ son números reales llamados **términos independientes**

Los sistemas de ecuaciones ayudan, por lo tanto, a plantear y resolver problemas, donde se tienen dos incógnitas a determinar.

Todo par de números $(x, y)$ que satisface ambas ecuaciones de un sistema se llama **solución** del sistema de ecuaciones. Un sistema de ecuación lineal (SEL) puede presentar solución única, infinitas o no tener solución.

## Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

- Sistema ***compatible***: es el que tiene solución.

Dependiendo del número de soluciones puede ser:

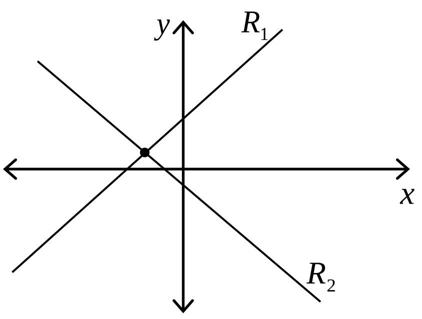
- Sistema ***compatible determinado*** si tiene una única solución.
- Sistema ***compatible indeterminado*** si tiene infinitas soluciones.

- Sistema ***incompatible***: es el que no tiene solución.

Importante:

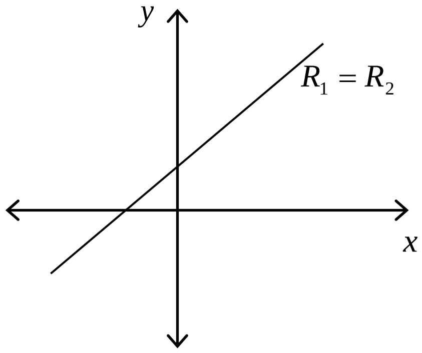
**Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, gráficamente representa el dibujo de dos rectas en el plano. Por lo tanto, puede ocurrir alguno de los siguientes casos.**

- Caso *a*: **Que las dos rectas se corten en un único punto.**



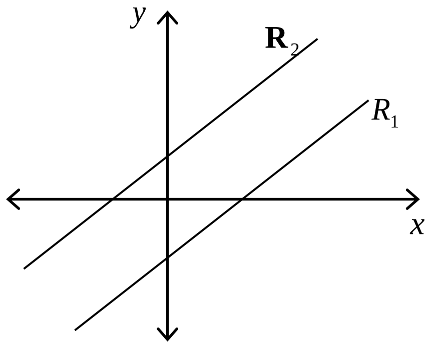

**Esto indica que: El sistema dado es compatible determinado. Dicha solución son las coordenadas del punto de corte.**

- Caso *b*: **Que las dos rectas estén superpuestas (o sea coincidentes)**




**Esto indica que el conjunto solución es Compatible indeterminado. La solución estará dada por cualquier punto que pertenezca a la recta.**

- Caso *c*: **Que las dos rectas sean paralelas**




**Luego se observa que no existen pares $(x, y)$ que satisfagan a las dos rectas simultáneamente. Por lo tanto, el SEL es Incompatible. El conjunto solución, será un conjunto vacío.**

*A continuación, se analizan dos métodos analíticos el <u>método de sustitución y el de igualación</u>. También estudiaremos el método gráfico.*

<u>Nota</u>: Hay otros métodos para resolver SEL, pero en este curso de ingreso evaluaremos el conocimiento de los que serán dados en este apunte, por tanto, se solicita que en evaluaciones, sean estos los mismos a emplear.

## Método de sustitución

Para aplicar este método debe tener en cuenta los siguientes pasos:

Paso 1: De alguna de las ecuaciones del sistema despejar una de las incógnitas.
Paso 2: Sustituir la variable despejada en la otra ecuación del sistema (la que no se usó en el paso 1). De esta forma se obtiene una "ecuación lineal con una incógnita", que se debe resolver.
Paso 3: Reemplazar el valor de la variable obtenido, en la ecuación del paso 1 y determinar el valor de la otra incógnita.

Ejemplo: Resolveremos el sistema planteado anteriormente $\begin{cases} 2x + y = 7 \ \ (1) \\ x - y = 2 \ \ (2) \end{cases}$

**Paso 1:** Despejo $x$ de (2): $x = 2 + y \quad (3)$
**Paso 2**: Sustituyo lo obtenido en (1) $\rightarrow$ $\mathbf{2\,(2 + y) + y = 7}$
Resolviendo:

$$4 + 2y + y = 7$$
$$3y = 7 - 4$$
$$y = 3:3$$
$$y = 1$$

**Paso 3**: Reemplazo lo obtenido en (3) $\rightarrow$ $x = 2 + 1 = 3$

Finalmente, $S = \{(3,1)\}$

Verificamos: $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.3 + 1 = 7 \\ 3 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ 2 = 2 \end{cases}$ ✅

## Método de igualación

Paso 1: Despejar la misma incógnita de cada ecuación.
Paso 2: Igualar las expresiones obtenidas y de esta forma se obtiene una “ecuación lineal con una incógnita” que se debe resolver.
Paso 3: Reemplazar el valor de la variable obtenido, en alguna de las ecuaciones del paso 1 y determinar el valor de la otra variable.

Ejemplo: Resolveremos el sistema planteado anteriormente $\begin{cases} 2x + y = 7 \ \ (1) \\ x - y = 2 \ \ (2) \end{cases}$

**Paso 1**
De (1): $y = 7 - 2x$
De (2): $-y = 2 - x \rightarrow y = -2 + x$

**Paso 2**: Igualamos

$$7 - 2x = -2 + x$$
$$-2x - x = -2 - 7$$
$$-3x = -9$$
$$x = (-9):(-3)$$
$$x = 3$$

**Paso 3**: $y = 7 - 2x = 7 - 2.3 = 1$

Finalmente $S = \{(3,1)\}$

Se deja como ejercicio verificar la solución encontrada.

**Nota importante**

Cuando se resuelve un sistema de ecuaciones en forma gráfica, es simple identificar si el mismo tiene infinitas soluciones o bien, que no tenga solución, tal como se analizó anteriormente, pero ¿qué sucede en forma analítica?

En forma analítica, en cualquiera de los casos, en el paso 2, va a desaparecer una de las variables, y automáticamente podemos encontrar:

a) Un absurdo (algo no válido, que no tiene sentido): lo cual implica que el sistema no tiene solución.

b) Una identidad: lo cual indica que el sistema tiene infinitas soluciones. En este caso se escribe el conjunto solución por comprensión (porque es infinito) y luego se encuentran soluciones particulares.
Trabajamos este caso en el siguiente ejemplo.

<u>Ejemplo</u>: Resolver el SEL dado por $\begin{cases} x + 2y = 1 \ \ (1) \\ 2x = 2 - 4y \ \ (2) \end{cases}$

Por el método de sustitución, primero despejo una variable de una ecuación, de (1):

$$x = 1 - 2y$$

Reemplazo lo obtenido en (2):

$$2.(1 - 2y) = 2 - 4y$$

$$2 - 4y = 2 - 4y$$

$$2 - 2 = -4y + 4y$$

$$0 = 0$$

Lo obtenido es una identidad, entonces se entiende que el SEL es compatible indeterminado. Resta escribir el conjunto solución:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1 - 2y\}$$

En la cláusula del conjunto, se escribe cualquiera de las ecuaciones del sistema. Es conveniente escribir alguna en la cual una variable ya esté despejada, para simplificar el cálculo de algunas soluciones particulares.

<u>Nota</u>: Como los pares ordenados que son solución del sistema pertenecen al plano cartesiano, es que se usa la notación de $\mathbb{R}^2$.

**Encontramos soluciones particulares**: Para esto damos cualquier valor a la variable que NO fue despejada y se reemplaza en la cláusula del conjunto:

- Si $y = 1$ entonces $x = 1 - 2.1 = -1 \Rightarrow S_1 = (-1,1)$ es una solución particular.
- Si $y = 0$ entonces $x = 1 - 2.0 = 1 \Rightarrow S_2 = (1,0)$ es otra solución particular.
  Y así podremos seguir, encontrando tantas como sean pedidas, asignando más valores a la variable.

## Método gráfico

Consiste en graficar cada una de las rectas que representan al conjunto solución de las ecuaciones del sistema, y analizar sus posiciones.

Tener en cuenta:

- Para poder graficar, SIEMPRE primero se debe despejar la variable "$y$" en ambas ecuaciones, para identificar la pendiente y ordenada al origen. Datos esenciales para graficar.
- NO OLVIDAR graduar los ejes $x$ e $y$ en la gráfica, de lo contrario las gráficas no podrán ser corregidas.

Previo a la resolución de los SEL con el método gráfico, recordamos cómo graficar rectas, reconociendo la pendiente y ordenada al origen.
Luego de despejar la variable $y$, se obtiene una expresión como la siguiente:

$$y = ax + b$$

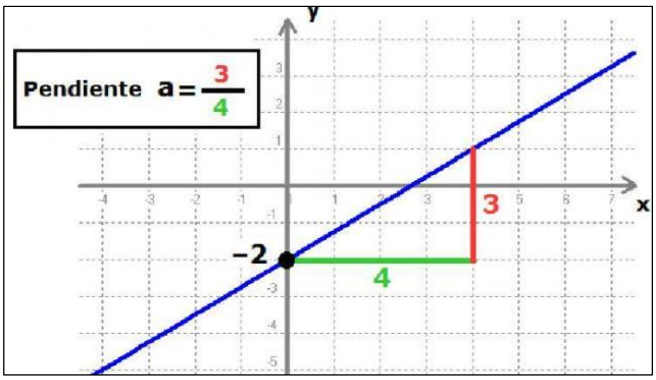
Donde, $a$ es la pendiente y $b$ es la ordenada al origen (punto de intersección con el eje $y$). Teniendo en cuenta estos dos valores, veamos a partir de los siguientes ejemplos cómo graficar.

Ejemplo 1: Graficamos la recta $y = \frac{3}{4}x - 2$

Primero marcamos sobre el eje $y$ la ordenada al origen $b = -2$.

Luego, desde ese punto, nos movemos como indica la pendiente.

El denominador indica movimiento en $x$ (horizontal) y el numerador movimiento en $y$ (vertical).



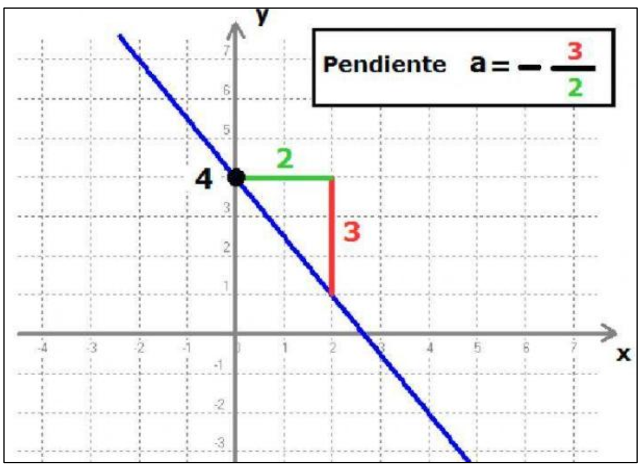

Ejemplo 2: Graficamos la recta $y = -\frac{3}{2}x + 4$

**Atención** si la pendiente es negativa. Deberemos optar por que el signo afecte al numerador o al denominador,

$$a = \frac{-3}{2} \quad \text{o bien} \quad a = \frac{3}{-2}$$

En este caso en particular, se optó por $a = \frac{-3}{2}$

**Cuidado** pues si interpretamos mal el signo y generamos esto: $a = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ *¡en realidad estaríamos considerando la pendiente positiva!*



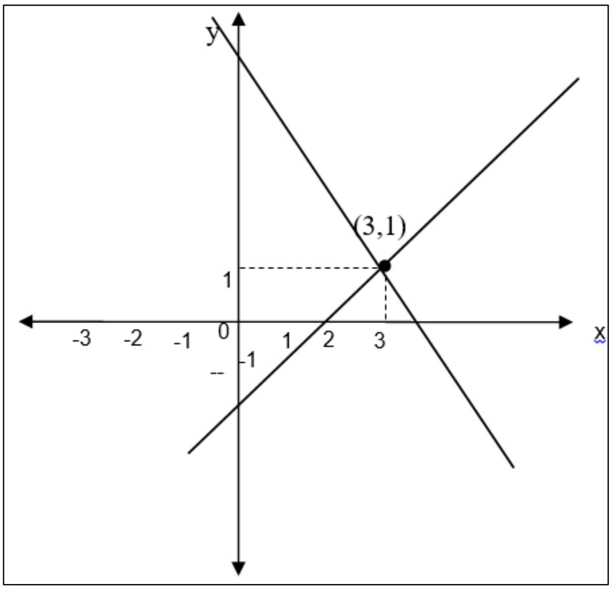
Ahora sí, pasamos a la resolución del sistema.

<u>Ejemplo</u>: Resolver en forma gráfica el SEL $\begin{cases} 2x + y = 7 \ \ (1) \\ x - y = 2 \ \ (2) \end{cases}$. Dado que debemos graficar cada una de las rectas dadas, es que se despeja en principio la variable $y$ para identificar de dicha recta su pendiente y ordenada al origen, lo cual facilitará su gráfica: $\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = x - 2 \end{cases}$

Se representan gráficamente en un mismo sistema ambas rectas, en el mismo sistema de ejes cartesianos.

Como en este caso, es compatible determinado, las rectas se cortan en un solo punto, el cual es la solución del sistema.

$$S = \{(3,1)\}$$



# UNIDAD 3 – EXPRESIONES ALGEBRAICAS. POLINOMIOS. FACTORIZACIÓN.

Una expresión algebraica real es una combinación de letras y/o números reales, vinculados a través de las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación de exponente racional. Algunos ejemplos:

a) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ con variables $r$ , $h$

b) $10 - 3\sqrt[5]{y} + \frac{5}{7+y^2}$ con variable $y$

c) $(a+b)^3 - 3a - 12ab^2$ de variables $a, b$

En esta unidad, trabajaremos con un tipo de expresiones algebraicas en particular, llamadas POLINOMIOS y se caracterizan en que la variable está afectada por una potencia de exponente natural o cero.

Un polinomio de grado $n$, en la indeterminada $x$ es una expresión algebraica de la forma,

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_o$$

Donde:

- $a_n , a_{n-1} , \ldots , a_2 , a_1 , a_0$ son llamados coeficientes, y son todos números reales
- $x$ es la variable, denominada variable real
- $n$ es un número natural que indica el grado del polinomio, es exactamente el exponente más alto que aparece en el polinomio
- El coeficiente de la mayor potencia de $x$ se llama coeficiente principal.
- El coeficiente $a_0$ se llama término independiente.

Nota: Dado el polinomio $Q(x) = 4x^3$ se dice que la parte literal es $x^3$ y $4$ es el coeficiente principal.

## Conceptos importantes

| | |
|---|---|
| **Polinomio constante** | El grado es cero<br>Ejemplo: $Q(x) = 7$ |
| **Polinomio mónico** | El coeficiente principal es uno<br>Ejemplo: $T(x) = x^3 + 4x - 1$ |
| **Monomio** | Polinomio de un solo término (no nulo)<br>Ejemplo: $A(x) = 2x^5$ |
| **Binomio** | Polinomio de dos términos (no nulo)<br>Ejemplo: $B(x) = 8 + x^2$ |

| | |
|---|---|
| **Monomios semejantes** | Tienen la misma parte literal<br>Ejemplo: $A(x) = 4x^2$ con $H(x) = \frac{1}{3}x^2$ |
| **Polinomios iguales** | Sus monomios semejantes son iguales |
| **Polinomio completo** | No le falta ningún término<br>Ejemplo: $T(x) = x^3 - 2x + 4x^4 + 2$ |
| **Polinomio ordenado** | Puede ocurrir en orden creciente o decreciente, está dado el orden en términos de la potencia de la variable, ejemplos:<br>Creciente: $T(x) = 4x^4 + x^3 - 2x + 2$<br>Creciente y completo: $T(x) = 4x^4 + x^3 + 0x^2 - 2x + 2$<br>Decreciente: $T(x) = 2 - 2x + x^3 + 4x^4$<br>Decreciente y completo: $T(x) = 2 - 2x + x^3 + 0x^2 + 4x^4$ |
| **Polinomio nulo** | Todos los coeficientes son nulos. Aquí se dice que el polinomio no tiene grado.<br>Ejemplo: $P(x) = 0$ |

## Valor numérico y raíz de un polinomio

Se dice que el valor numérico de un polinomio en $x = a$ se obtiene al reemplazar dicho valor $a$, en el polinomio, y se denota $P(a)$

Ejemplo: Hallar el valor numérico del polinomio $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ en $x = -2$

$$P(-2) = 2.(-2)^2 - 3.(-2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15$$

Nota: cuidado con respecto al cambio en la notación, si se escribe el polinomio respecto a la variable escribimos $P(x)$ pero si el objetivo es encontrar el valor numérico, en lugar de la $x$ se escribe dentro del paréntesis el valor.

**Si ocurre que $P(a) = 0$ entonces se dice que $a$ es raíz del polinomio.**

Ejemplo: En el ejercicio anterior se obtuvo que $P(-2) = 15 \neq 0$. Por lo tanto $x = -2$ no es raíz del polinomio $P$.

## Operaciones con polinomios – Casos especiales

- **SUMA Y RESTA**

La suma (resta) de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando (restando) los monomios semejantes. En este caso se opera con los coeficientes y la parte literal no cambia.

Ejemplos: Sean $P(x) = 2x^4 - 3x + \frac{1}{2} + x^2$ ; $Q(x) = 5 + 3x^2 - 6x^4$

a) $P(x) + Q(x) = 2x^4 - 3x + \frac{1}{2} + x^2 + 5 + 3x^2 - 6x^4 = -4x^4 - 3x + 4x^2 + \frac{11}{2}$

b) $P(x) - Q(x) = 2x^4 - 3x + \frac{1}{2} + x^2 - (5 + 3x^2 - 6x^4)$

$$= 2x^4 - 3x + \frac{1}{2} + x^2 - 5 - 3x^2 + 6x^4$$

$$= 8x^4 - 3x - 2x^2 - \frac{9}{2}$$

- **MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS**

Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Aquí tener en cuenta que los coeficientes se multiplicarán y para la parte literal, recordar que, en productos de potencia de la misma base, los exponentes se suman. Terminada la propiedad distributiva, se suman los monomios semejantes.

Ejemplo: Dados $R(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}x$ ; $T(x) = 2x - 4x^3 + x^2$, resolvemos:

$$R(x).T(x) = \left(3x^2 + \frac{1}{2}x\right).(2x - 4x^3 + x^2)$$

$$= 6x^3 - 12x^5 + 3x^4 + x^2 - 2x^4 + \frac{1}{2}x^3$$

$$= -12x^5 + x^4 + \frac{13}{2}x^3 + x^2$$

**PRODUCTOS ESPECIALES**

- **Cuadrado de un binomio**

El cuadrado de un binomio, es un trinomio cuadrado perfecto, formado por:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

Nota: Con la intensión de poder aplicar esta propiedad sin problemas a cualquier expresión (aunque cambien las variables y/o expresión de cada término del binomio), se suele leer la propiedad como:

***"El cuadrado del primer término, mas (menos) el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término"***

Ejemplo: Si se quiere resolver $(x^2 + 4x)^2$ en lugar de resolver la multiplicación:

$$(x^2 + 4x).(x^2 + 4x)$$

Se pueden simplificar los cálculos aplicando la fórmula dada:

$$(x^2 + 4x)^2 = (x^2)^2 + 2.x^2.4x + (4x)^2 = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

- **Cubo de un binomio**

El cubo de un binomio es siempre un cuatrinomio, llamado cuatrinomio cubo perfecto, formado por:

$$\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

$$\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

Nota: Para aprender esta fórmula también se recomienda en su lectura,

***"El cubo del primer término, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término."***

Ejemplo: Si se quiere resolver $(x-2)^3$ en lugar de desarrollar el producto de,

$$(x-2).(x-2).(x-2)$$

Resulta conveniente aplicar la propiedad:

$$(x-2)^3 = x^3 - 3.x^2.2 + 3.x.2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

- **Diferencia de cuadrados**

La fórmula de la diferencia de cuadrados está dada por,

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a-b).(a+b)}$$

Se lee:

***El producto de la suma por la diferencia de dos términos es igual a la diferencia de los cuadrados de ambos.***

Ejemplo:

$$(x+3).(x-3) = x^2 - 9$$

- **DIVISIÓN**

Caso 1: Dividir un polinomio en un polinomio cualesquiera

Si se quiere dividir un polinomio $P(x)$ en un polinomio $Q(x)$ se dice que:

- $P(x)$: es el dividendo
- $Q(x)$: es el divisor
- $R(x)$: es el resto
- $C(x)$: es el cociente o resultado de la división

Se verifica que:

$$P(x) = Q(x).C(x) + R(x)$$

Tener en cuenta que: La división se realiza empleando el mismo algoritmo que se utiliza para dividir números reales. Es imprescindible antes de efectuar la división completar y ordenar en forma decreciente el dividendo, y ordenar en forma decreciente el divisor.

Ejemplo: Dados $A(x) = 4x^4 - 1 + 3x - 5x^2$ ; $B(x) = -x + 2x^2 + 1$. Hallar: $A(x) : B(x)$

- Ordeno y completo: $A(x) = 4x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 3x - 1$
- Ordeno: $B(x) = 2x^2 - x + 1$

Ahora resolvemos:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 4x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 3x - 1 & & & & 2x^2 - x + 1 \\
- & 4x^4 - 2x^3 + 2x^2 & & & & \hline 2x^2 + x - 3 \\
\hline
 & 2x^3 - 7x^2 + 3x - 1 & & & & \\
- & 2x^3 - x^2 + x & & & & \\
\hline
 & -6x^2 + 2x - 1 & & & & \\
- & -6x^2 + 3x - 3 & & & & \\
\hline
 & -x + 2 & & & &
\end{array}
$$

Luego: $C(x) = 2x^2 + x - 3$ ; $R(x) = -x + 2$

Tener en cuenta, que el grado del resto es siempre menor estricto que el grado del polinomio divisor.

Caso 2: Dividir un polinomio en otro de la forma $Q(x) = x - a$ ; o bien ; $Q(x) = x + a$

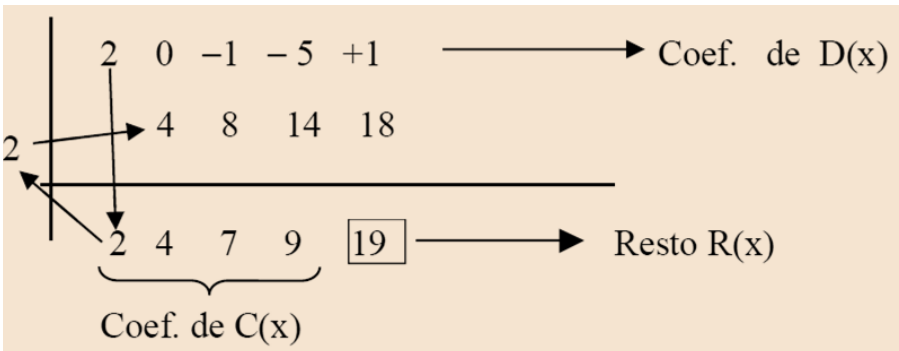
En este caso, el proceso para hacer la división se simplifica, cuando se tiene en el divisor un binomio mónico y de grado uno. **Se aplica la "Regla de Ruffini"**.

Se explica el proceso por medio del siguiente ejemplo.

Dados los polinomios $D(x) = 2x^4 + 1 - 5x - x^2$ y $Q(x) = x - 2$. Debemos:

- Completar y ordenar: $D(x) = 2x^4 + 0x^3 - x^2 - 5x + 1$

Luego:




$C(x) = 2x^3 + 4x^2 + 7x + 9$ ; $R(x) = 19$

El cociente, tiene exactamente un grado menos que el polinomio dividendo.

## Teorema del resto

El valor numérico que toma el polinomio $D(x)$ en $x = a$, es decir $D(a)$, coincide con el resto de dividir $D(x)$ por $x - a$.

Ejemplo: Corroboramos el ejercicio anterior,

$$D(2) = 2.2^4 + 1 - 5.2 - 2^2 = 32 + 1 - 10 - 4 = 19 = R(x)$$

El teorema anterior es de gran utilidad pues nos permite asegurar que:

**Si $x = a$ es raíz de $D(x)$ entonces $D(x)$ es divisible en $x - a$**

Ejemplo: Siguiendo lo resuelto en el ejemplo anterior, como $D(2) \neq 0$ entonces el polinomio $D(x)$ no es divisible en el polinomio $x - 2$.

## Factorización de polinomios

¿Qué significa factorizar un polinomio? Significa escribirlo como producto de factores, siendo cada uno, un polinomio irreducible.

¿Cómo se hace? Para factorizar un polinomio, debemos hallar las raíces de dicho polinomio. Para esto, es necesario recordar previamente algunos casos sencillos de factorización de polinomios.

- **FACTOR COMÚN**

Sacar o extraer factor común significa identificar en todos los términos del polinomio dado aquellos factores que se repiten, agruparlos y expresar el polinomio original como producto de un monomio, constituido por los factores comunes, y por un polinomio con términos en los que faltan los factores presentes en el monomio.

Ejemplos:

a) Sea $P(x) = 27x^3 + 3x^2 - 6x^4$

Respecto a los coeficientes, todos son divisibles por 3 (de no identificarlo se puede extraer el máximo común divisor). Respecto a la parte literal, se puede extraer la variable (presente en todos los términos) elevada a la menor potencia que aparezca, resultando:

$$P(x) = 3x^2\ (9x + 1 - 2x^2)$$

b) Sea $8x^2a^3 - 4x^2a^2$

En este caso, aparecen dos variables, y es posible identificar factor común respecto a los coeficientes y respecto a ambas variables, resultando:

$$8x^2a^3 - 4x^4a^2 = 4x^2a^2(2a - x^2)$$

## ▪ TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Al estudiar el cuadrado de un binomio se obtuvo como resultado un trinomio, llamado trinomio cuadrado perfecto. Si se reconoce dicho trinomio, es una forma simple y rápida de reducir la expresión para buscar la forma factorizada.

*¿Qué debe ocurrir?*

- Dos de los términos deben ser cuadrados perfectos, y en tal caso buscar sus bases.
- El término restante, debe ser el doble del producto de dichas bases.

<u>Ejemplo</u>: Sea $Z(x) = x^2 - 10x + 25$ , de aquí,

$$Z(x) = x^2 - 10x + 25$$

$$(x)^2 \qquad 2.x.5 \qquad (5)^2$$

Por lo tanto: $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

## ▪ DIFERENCIA DE CUADRADOS

Si el polinomio dado es un binomio con ambos términos cuadrados perfectos, y uno de ellos es negativo, entonces se podrá factorizar como el producto de la suma por la diferencia de las bases de esos cuadrados.

<u>Ejemplos</u>:

Si $S(x) = x^2 - 36$ entonces por la fórmula anteriormente estudiada se tiene,

$$S(x) = (x-6).(x+6)$$

Si $M(x) = x^4 - 9$ entonces,

$$M(x) = (x^2-3).(x^2+3)$$

Estudiamos a continuación, un importante resultado.

***TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA***

***Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo, n raíces***

Teniendo en cuenta este teorema y conocidas las raíces de un polinomio $x_1, x_2, \dots, x_n$, y su coeficiente principal $a_n$ ; la forma factorizada del mismo es:

$$\boldsymbol{P(x) = a_n(x-x_1).(x-x_2)\dots.(x-x_n)}$$

Observamos así, que para poder escribir la forma factorizada, es necesario conocer las raíces del polinomio. Nos preguntamos, ¿cómo encontrarlas? Esto dependerá del grado del polinomio.

- **Polinomio de grado uno: $\boldsymbol{P(x) = ax + b}$**

Forma 1: Se saca factor común del coeficiente principal y el polinomio queda factorizado.

Ejemplo: $F(x) = 4x + 8 = 4(x + 2)$ donde $x_1 = -2$

Forma 2: Igualar a cero la expresión del polinomio y despejar $x$.

Ejemplo: $F(x) = 4x + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x = -8 \quad \rightarrow \quad x = -2$

Luego, teniendo en cuenta el coeficiente principal: $F(x) = 4(x + 2)$

- **Polinomio de grado dos: $\boldsymbol{P(x) = ax^2 + bx + c}$**

Podemos proceder con alguna de las siguientes formas,

- Fórmula de Bhaskara: siempre posible de aplicar en polinomios de grado dos.
- Analizar si hay diferencia de cuadrados y la factorización es inmediata.
- Analizar si es un trinomio cuadrado perfecto y la factorización es inmediata.

- **Polinomios de grado mayor a dos**

Podemos proceder con alguna de las siguientes formas:

- Combinar casos de factorización anteriormente trabajados
- En caso de polinomios de grado 3, que presenten sólo 2 raíces, la calculadora no brinda información respecto a cuál es la que se repite. Se procede a aplicar Ruffini con una de las raíces, bajando así un grado al polinomio; luego se aplica Bhaskara al polinomio de grado 2 resultante.
- En caso de polinomios con 3 raíces distintas, tomar una para bajar un grado al polinomio con Ruffini y luego finalizar con Bhaskara. Caso contrario, calcular las 3 raíces con la calculadora.
- Para polinomios de grado mayor a tres, emplear combinaciones de casos especiales estudiados.

Nota: si un polinomio ya no puede ser factorizado en otros de orden menor con **raíces reales**, diremos que el mismo es irreducible.

Ejemplo: El polinomio $A(x) = x^2(x^2 + 1)$ diremos que ya está en su forma factorizada. Dado que el polinomio $x^2 + 1$ no presenta raíces reales.

# UNIDAD 4 – TRIGONOMETRÍA

La palabra TRIGONOMETRIA proviene del griego Trigonom: triangulo y Metrom: medida. Entonces significa "MEDIDA DE TRIANGULOS".

Desde sus orígenes, la TRIGONOMETRIA estudia: las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos. Las dos líneas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se ocupa de triángulos que forman parte de la superficie de una esfera.

## Sistemas de medición angular

Para expresar la medida de un ángulo, se pueden utilizar los siguientes sistemas:

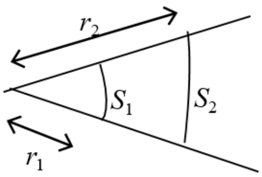
- Sistema Sexagesimal

Su unidad de medida es el "grado sexagesimal"; donde un grado sexagesimal, simbólicamente escribimos: 1° ; representa la noventa-ava parte de un ángulo recto.

$$1° = \frac{\text{ángulo recto}}{90} \quad \Rightarrow \quad 90° = \text{ángulo recto}$$

- Sistema Radial

Para definir la unidad de medida de este sistema, analizamos un ángulo cualquiera, con centro en el vértice del ángulo y radios $r_1$ y $r_2$, si se trazan arcos de circunferencias de longitudes $S_1$, $S_2$; se obtiene la siguiente figura, en la cual se verifica:




$$\frac{S_1}{r_1} = \frac{S_2}{r_2} = a \quad ; a = \text{constante}$$

Por lo tanto, para cualquier radio $r$ y la correspondiente longitud de arco $S$, se tiene la misma constante:

$$\frac{S}{r} = a$$

Esta constante $a$, es exactamente la amplitud del ángulo, medido en RADIANES. Un radián, es la medida del ángulo cuyo arco coincide con el radio de la circunferencia, en la que está centrado.

Nota: Sabiendo que el ángulo de un giro corresponde a 360° y teniendo en cuenta que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, entonces:

$$\alpha = \frac{S}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Por lo tanto, 360° en el sistema sexagesimal, corresponden a $2\pi$ rad; en el sistema radial.

Observemos en la siguiente tabla, algunas equivalencias entre los dos sistemas:

| **Sistema sexagesimal** | **Sistema Radial** |
|---|---|
| 0° | 0 rad |
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ rad |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ rad |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ rad |
| 90° | $\frac{\pi}{2}$ rad |
| 180° | $\pi$ rad |
| 270° | $\frac{3}{2}\pi$ rad |
| 360° | $2\pi$ rad |

Para cualquier ángulo expresado en un sistema de medición, se lo puede expresar en el otro sistema, empleando una regla de tres. Para esto necesitamos recordar, al menos solo una conversión dada en la tabla anterior.

<u>Ejemplos</u>:

a) Dado el ángulo $\alpha = 50°$ expresarlo en el sistema radial

$$\begin{array}{ccc} 180° & \_\_\_\_ & \pi\, rad \\ 50° & \_\_\_\_ & x \end{array} \Rightarrow \quad x = \frac{50°\,.\,\pi\, rad}{180°} = \frac{5}{36}\,\pi\ rad$$

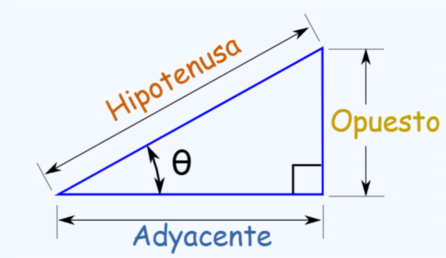
b) Dado el ángulo $\beta = 4{,}5$ rad ; expresarlo en el sistema sexagesimal.

$$\begin{array}{ccc} \pi\, rad & \_\_\_\_ & 180° \\ 4{,}5\, rad & \_\_\_\_ & x \end{array} \Rightarrow \quad x = \frac{4{,}5\, rad\,.\,180°}{\pi\, rad} = 257°\,57'42''$$

<u>Nota</u>: Si un ángulo se mide en sentido antihorario (contrario a las agujas del reloj) se dice que está en sentido positivo. Y si está en sentido horario, se dice que está en sentido negativo.

## Razones trigonométricas

Se llaman razones trigonométricas a las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Son seis y reciben el nombre de seno (sen), coseno (cos), tangente (tg), cotangente (cotg), secante (sec) y cosecante (cosec).




$$\boldsymbol{sen(\theta)} = \frac{\boldsymbol{cat.op.}}{\boldsymbol{hip}} \qquad \boldsymbol{cosec(\theta)} = \frac{\boldsymbol{hip}}{\boldsymbol{cat.op.}}$$

$$\boldsymbol{\cos(\theta)} = \frac{\boldsymbol{cat.ady.}}{\boldsymbol{hip}} \qquad \boldsymbol{\sec(\theta)} = \frac{\boldsymbol{hip}}{\boldsymbol{cat.ady.}}$$

$$\boldsymbol{tg(\theta)} = \frac{\boldsymbol{cat.op.}}{\boldsymbol{cat.ady.}} \qquad \boldsymbol{cotg(\theta)} = \frac{\boldsymbol{cat.ady.}}{\boldsymbol{cat.op.}}$$

De las definiciones anteriores se deduce que

$$\boldsymbol{tg(\theta)} = \frac{\boldsymbol{sen(\theta)}}{\boldsymbol{\cos(\theta)}} \ ; \ \boldsymbol{cotg\ (\theta)} = \frac{\boldsymbol{\cos(\theta)}}{\boldsymbol{sen(\theta)}} \ ; \ \boldsymbol{\sec(\theta)} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\cos(\theta)}} \ ; \ \boldsymbol{cosec(\theta)} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{sen(\theta)}}$$

## Circunferencia trigonométrica

Recibe el nombre de circunferencia trigonométrica la circunferencia de centro en el origen de coordenadas cartesianas (0,0) y de radio $r = 1$.

Observamos en los siguientes gráficos, un ángulo en cada cuadrante, para los cuales han sido representados por medio de segmentos, las razones de **seno**, **coseno** y **tangente**.

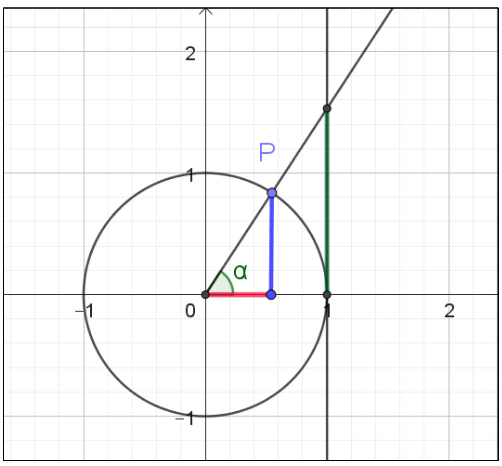
### *¿Cómo determinar estos segmentos?*

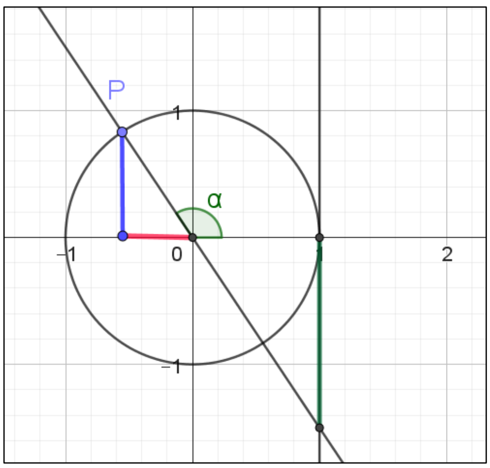
En primer lugar, notar que el punto $P$ está dado por la intersección del lado terminal del ángulo con la circunferencia trigonométrica. Luego:

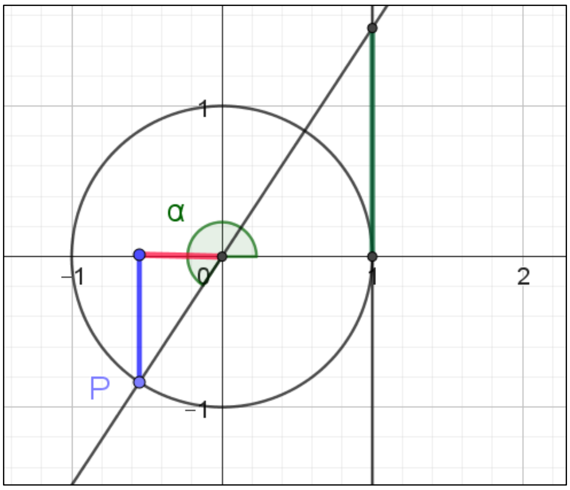
- La representación segmentaria del seno, se obtiene por medio del segmento que se genera desde el punto $P$, hacia el eje $x$. Dicho **segmento**, intersecta al eje $x$ en un punto, si se traza un **segmento** entre dicho punto y el origen se obtiene el coseno.

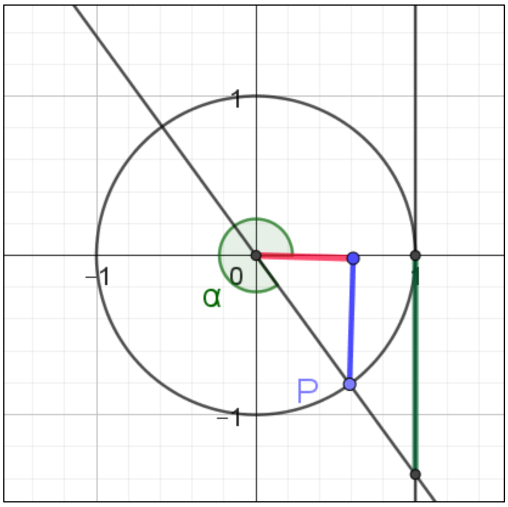
- El lado terminal del ángulo, intersecta a la recta $x = 1$ en un punto. El **segmento** dado entre ese punto y el eje $x$ representa la tangente.

Observemos estos casos en cada cuadrante.






Ejercicio: A partir de la observación de los gráficos anteriores, completar el siguiente cuadro reconociendo los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante.

| Cuadrante | Seno | Coseno | Tangente | Cosecante | Secante | Cotangente |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***I*** | | | | | | |
| ***II*** | | | | | | |
| ***III*** | | | | | | |
| ***IV*** | | | | | | |

## Relaciones entre las razones trigonométricas y lados del triángulo

- **TEOREMA DE PITÁGORAS**

Teniendo en cuenta las referencias dadas, se verifica:

$h$: hipotenusa

$c_1$: cateto

$c_2$ : cateto

$$\boldsymbol{h^2 = (c_1)^2 + (c_2)^2}$$

Se lee: La hipotenusa al cuadrado, es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

- **TEOREMA FUNDAMENTAL**

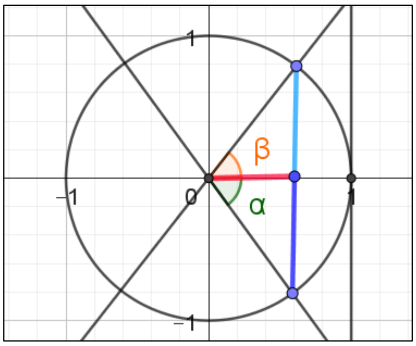
$$\boldsymbol{sen^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1}$$

- **OTRAS RELACIONES**

$$\boldsymbol{1 + cotg^2(\theta) = cosec^2(\theta)}$$

$$\boldsymbol{1 + tg^2(\theta) = sec^2(\theta)}$$

- Ángulos opuestos: $\beta = -\alpha$




$$sen(\beta) = -sen(\alpha)$$

$$\cos(\beta) = \cos(\alpha)$$

## Inversas de relaciones trigonométricas

Dado el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad , le corresponde el valor de 0,5 para el seno, esto es: $sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,5$

Esto implica que $\frac{\pi}{6}$ es el arco, cuyo seno es 0,5. Simbólicamente:

$$arc\ sen(0,5) = \frac{\pi}{6}$$

En general:

$$\textbf{Si } \boldsymbol{y = sen(\alpha)} \textbf{ entonces } \boldsymbol{\alpha = arc\ sen(y)}$$

Se dice que la relación “arco seno” es la inversa del seno.

Análogamente podemos escribir:

$$\textbf{Si } \boldsymbol{y = cos(\alpha)} \textbf{ entonces } \boldsymbol{\alpha = arc\ cos(y)}$$

$$\textbf{Si } \boldsymbol{y = tg(\alpha)} \textbf{ entonces } \boldsymbol{\alpha = arc\ tg(y)}$$

Conocida la relación trigonométrica y el signo de la misma, se puede ubicar un ángulo en el cuadrante correspondiente. Pero ocurre, por ejemplo, que un ángulo y su opuesto tienen el mismo valor del coseno:

$$\cos(60°) = 0,5 \qquad y \qquad \cos(-60°) = 0,5$$

Para expresar el ángulo en sentido negativo, al sentido positivo, se resuelve:

$$-60° + 360° = 300°$$

Siendo $300° \in IV\ cuad$ y $60° \in I\ cuad$. Por tanto, hay dos ángulos (en el primer y cuarto cuadrante) cuyos cosenos valen lo mismo. Estas relaciones suceden con todas las relaciones trigonométricas y relacionando los distintos cuadrantes. Estas relaciones pueden ser analizadas desde la circunferencia trigonométrica, o bien, están dadas las mismas en el siguiente cuadro:

| **Valor de la Relación Trigonométrica** | **Ángulo agudo dado por la calculadora** |
|---|---|
| Seno – Positivo | $\alpha$ , $(180° - \alpha)$ |
| Seno – Negativo | $(\alpha + 360°)$ , $(\alpha + 180°)$ |
| Coseno – Positivo | $\alpha$ , $(360° - \alpha)$ |
| Coseno – Negativo | $\alpha$, $(360° - \alpha)$ |
| Tangente – Positivo | $\alpha$ , $(\alpha + 180°)$ |
| Tangente – Negativa | $(\alpha + 360°)$ , $(180° + \alpha)$ |

<u>Ejemplos</u>:

a) $sen(\alpha) = 0{,}5$ (esto ocurre en primer y segundo cuadrante)

$$\alpha = arc\ sen(0{,}5) = 30° \in I\ \ cuad$$

$$\beta = 180° - 30° = 150° \in II\ \ cuad$$

b) $sen(\alpha) = -0{,}5$ (esto ocurre en tercer y cuarto cuadrante)

$$\alpha = arcsen(-0{,}5) = -30° \quad \Rightarrow \quad \alpha = -30° + 360° = 330° \in IV\ \ cuad$$

$$\beta = 180° + 30° = 210° \in III\ cuad$$

c) $\cos(\alpha) = 0{,}5$ (esto ocurre en primer y cuarto cuadrante)

$$\alpha = arc\cos(0{,}5) = 60° \in I\ cuad$$

$$\beta = 360° - 60° = 300° \in IV\ cuad$$

d) $tg(\alpha) = 1$ (esto ocurre en el primer y tercer cuadrante)

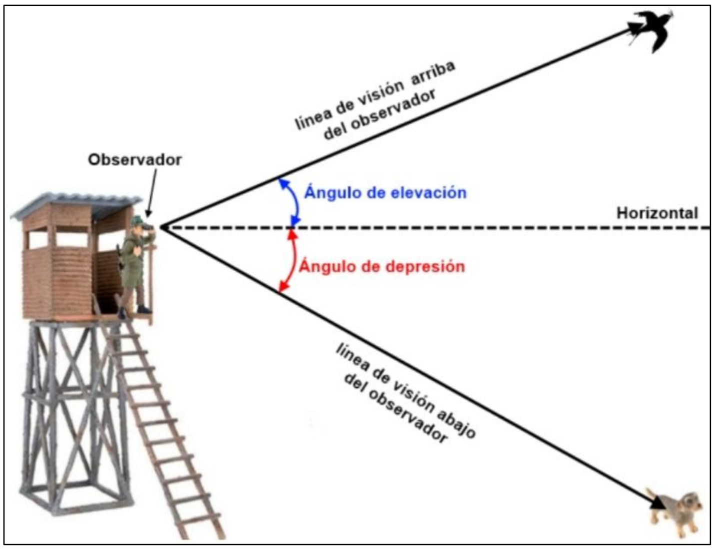
$$\alpha = arc\ tg(1) = 45° \in I\ \ cuad$$

$$\beta = 180° + 45° = 225° \in III\ \ cuad$$

<u>Nota</u>: para cada ejercicio, se debe estar atento respecto a cuál es el ángulo que se pide determinar y en qué sistema de medición se debe expresar.

## Aplicación de trigonometría en triángulos rectángulos

Otro de los conceptos que aplicamos para dar solución a las situaciones planteadas mediante un triángulo rectángulo es el de ANGULO DE ELEVACION Y ANGULO DE DEPRESION.

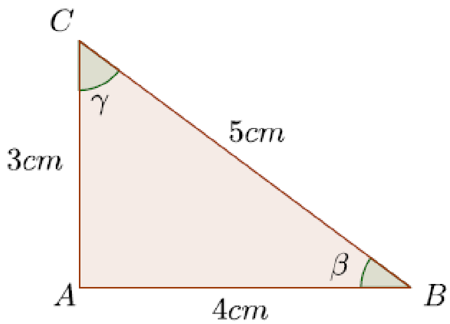



El término ángulo de elevación denota al ángulo desde la horizontal hacia arriba a un objeto. El término ángulo de depresión denota al ángulo desde la horizontal hacia abajo a un objeto. Una línea de vista para el observador estaría debajo de la horizontal.

***Nota importante*: Resolver un triángulo rectángulo, significa hallar las medidas de todos sus lados y las amplitudes de todos sus ángulos.**

Ejemplo: A partir de los datos dados en la figura, se pide determinar los ángulos $\beta$ y $\gamma$.

$$sen(\beta) = \frac{cat.op.}{hip} = \frac{3}{5}$$




Entonces:

$$\beta = arcsen\left(\frac{3}{5}\right) = 36°52'12''$$

Por otro lado, recordando que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180° se podría plantear la ecuación correspondiente y resolver:

$$\gamma + 90° + 36°52'12'' = 180°$$

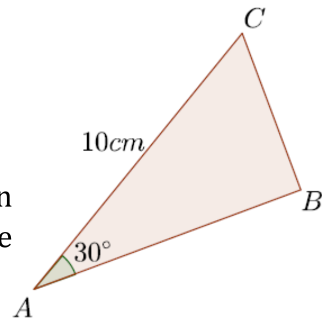
$$\gamma = 180° - 90° - 36°52'12''$$

$$\gamma = 53°\,7'48''$$

Ejercicio: Hallar la amplitud de $\gamma$ empleando la razón trigonométrica coseno, en el ejercicio anterior y comparar con el resultado ya obtenido.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Ejemplo: La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 $cm$ y uno de sus ángulos mide 30°. ¿Cuánto miden los otros lados?




$$sen(30°) = \frac{cat.op.}{hip.} = \frac{\overline{CB}}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{CB}}{10} \Rightarrow 5 = \overline{CB}$$

De una forma similar, podemos hallar $\overline{AB}$. O bien, como ya son conocidos dos lados, encontramos el restante con el teorema de Pitágoras:

$$10^2 = 5^2 + (\overline{AB})^2$$

$$100 - 25 = (\overline{AB})^2$$

$$75 = (\overline{AB})^2$$

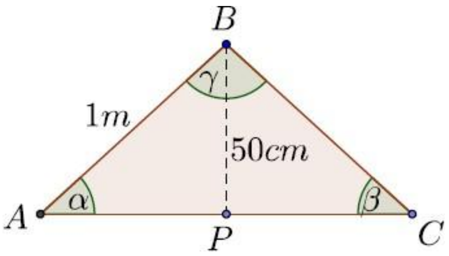
Esta ecuación nos da dos resultados, según lo estudiado en unidad anterior, pero dado que buscamos el valor de la medida de un lado, debe ser positivo, entonces:

$$\overline{AB} = \sqrt{75} \approx 8{,}66$$

Respuesta: el lado $\overline{CB}$ mide 5 $cm$ y el lado $\overline{AB}$ mide 8,66 $cm$

Ejemplo: En el triángulo isósceles de la figura, los lados iguales miden $1m$, y la altura con respecto al lado restante miden 50 $cm$. ¿Cuál es la medida de los ángulos?

Unificando unidades: $50\ cm = 0{,}5\ m$ ; luego:




$$sen\ (\alpha) = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = \beta = arc\ sen(0{,}5) = 30°$$

$$\cos(\gamma) = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5 \Rightarrow \gamma = arc\cos(0{,}5) = 60°$$

Nota: para verificar, en estos ejercicios se puede corroborar que la suma de los ángulos interiores del triángulo da 180°.

# UNIDAD 5 – FUNCIONES

El uso de **funciones** es fundamental para describir y analizar relaciones entre variables. Están presentes en múltiples situaciones cotidianas, científicas y tecnológicas: desde el crecimiento de una población hasta el comportamiento de un medicamento en el cuerpo. Comprender el concepto de función permite interpretar fenómenos, anticipar resultados y tomar decisiones informadas, por eso su estudio es clave al comenzar una carrera universitaria en el campo de las ciencias.

## Algunos conceptos básicos

Sean los conjuntos $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos. **Una función es una relación entre los conjuntos $A$ y $B$ donde a cada elemento de $A$ (conjunto de partida) se le asigna *un y sólo un* elemento de $B$ (conjunto de llegada)**.

Las funciones se denotan con letras minúsculas y la relación entre los conjuntos queda indicada con:

$$\boldsymbol{f: A \to B} \quad \text{dada por} \quad y = f(x)$$

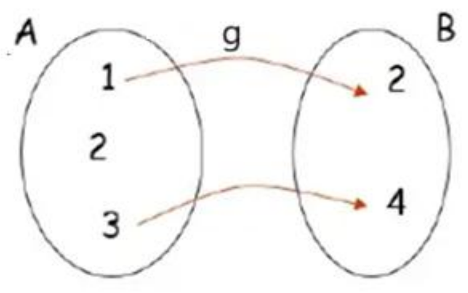
En este caso $f$ es el nombre de la función, $A$ es el conjunto de partida de la función (dominio) y $B$ es el conjunto de llegada (codominio). Se dice que $x$ es la variable independiente, mientras que $y$ es la variable dependiente.

Importante:

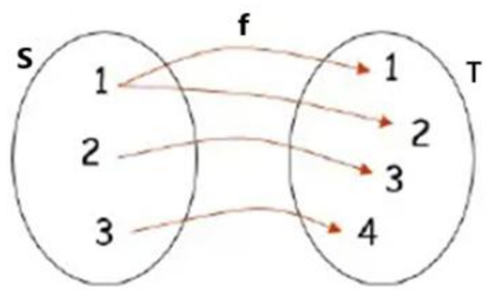
- Como $A, B$ son subconjuntos de los números reales, decimos que son funciones reales de variable real.
- Si $A, B$ son finitos, se puede representar la función en un diagrama de Venn.
- Si $A, B$ son infinitos, entonces los representamos en sistemas de ejes cartesianos. En esta unidad estamos interesados especialmente en estos casos.

Analicemos con algunos Diagramas de Venn el concepto estudiado de funciones.

La relación $g$ entre los conjuntos $A$ y $B$ no es una función. Dado que **a cada elemento** del conjunto de partida, debe tener un correspondiente en el conjunto de llegada y esto no ocurre con $2 \in A$.




La relación $f$ entre los conjuntos $S$ y $T$ no es una función. Dado que cada elemento del conjunto de partida, debe tener **un y sólo un** correspondiente en el conjunto de llegada y esto no ocurre con $1 \in S$, puesto que se le asigna el 1 y 2 en el conjunto $T$.



**IMPORTANTE**:

La notación $f(a)$ permite identificar qué valor le asigna la función $f$ al elemento $a$ (que se encuentra en el conjunto de partida). Se dice que $f(a)$ es la imagen del elemento $a$.

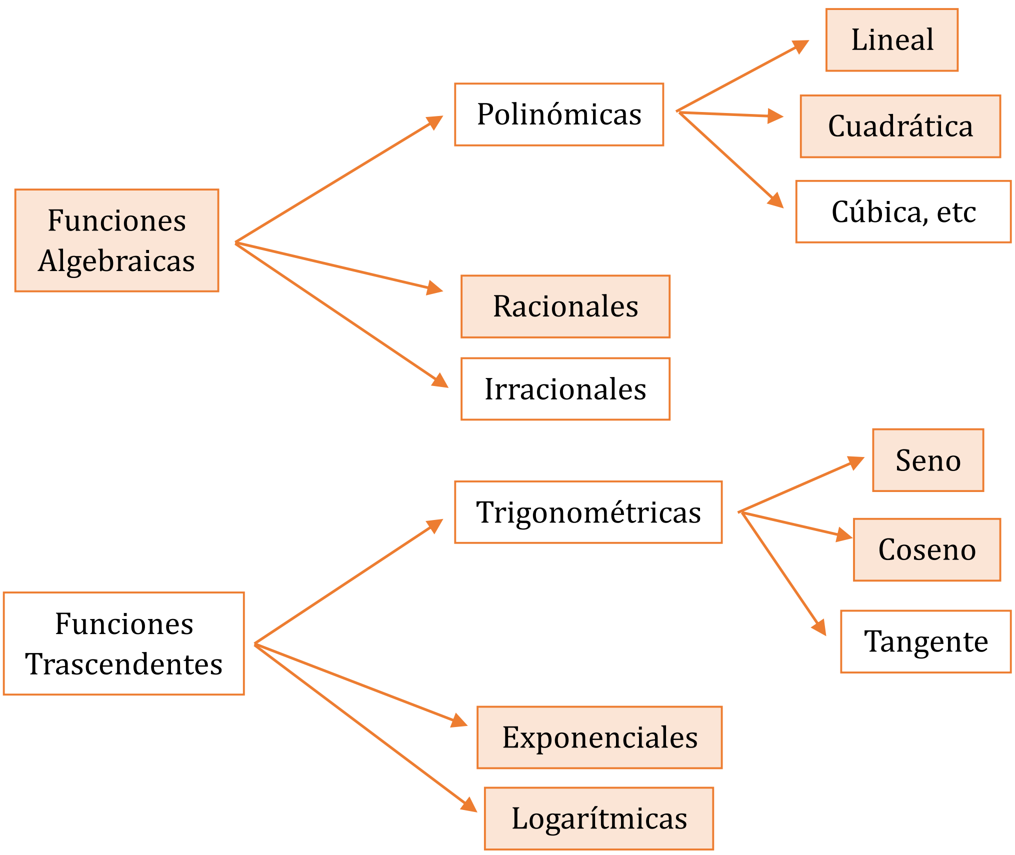
> Por ejemplo, dada $f(x) = x^2 + 2x$ entonces: $f(3) = 3^2 + 2.3 = 9 + 6 = 15$
> Esto significa, que el correspondiente del 3 es el 15. También decimos, que la imagen del valor $x = 3$ es 15.

*¡Ayuda!* Puede ser útil para comprenderlo, recordar cómo encontraban previamente el valor numérico de un polinomio.

## Clasificación y gráfica de funciones

Las funciones pueden estar representadas por medio de una fórmula. En esta unidad, estamos interesados en estudiar las fórmulas que algunos tipos de funciones presentan y lograr posteriormente sus gráficas en sistemas de ejes cartesianos, a partir de tablas de valores.

En la siguiente imagen, estudiaremos la clasificación de funciones, y luego se trabajará especialmente con las fórmulas y gráficas de las que aparecen sombreadas.



## FUNCIONES POLINÓMICAS

Las funciones polinómicas son aquellas dadas por la siguiente forma, que seguramente nos resulte conocida desde el trabajo con la unidad de polinomios:

$$f: D \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

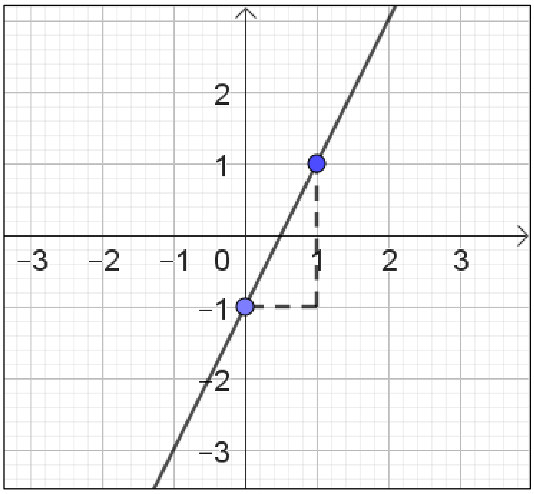
Donde: $n$ es el grado del polinomio y con la letra $D$ simbolizaremos al dominio de la función.

- Si el grado del polinomio es uno, entonces es una **FUNCIÓN LINEAL**:

  $$f: D \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x) = ax + b$$

  Las funciones lineales, están dadas en sus gráficas por medio de rectas. El coeficiente $a$ representa la pendiente y el coeficiente $b$ la ordenada al origen. Para graficar, recordar los pasos detallados en la sección de sistemas de ecuaciones (desde el método gráfico).

  Ejemplo: Dada la función $g(x) = 2x - 1$, su gráfica es:

  Nota: no se aceptarán tablas de valores para la gráfica de funciones lineales. En el desarrollo, debe quedar indicado el punto correspondiente a la ordenada al origen y el movimiento desde ese punto según la pendiente.

- Si el grado del polinomio es dos, entonces es una **FUNCIÓN CUADRÁTICA**:

  $$f: D \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

  La gráfica de una función cuadrática es una parábola, y para graficarla, resulta de utilidad conocer previamente algunos elementos notables de la misma.

  - **Vértice**: es un punto desde donde salen las ramas de la parábola, se calcula de la siguiente manera,

    $$V = (h, k) \quad , donde\ h = -\frac{b}{2a} \quad , k = f(h)$$

  - **Intersecciones con los ejes coordenados**

    Eje $y$: está dado por el valor del término independiente.

    Eje $x$: se deben calcular las raíces del polinomio de grado dos, empleando la calculadora o Bhaskara.

Nota: De ser necesario para completar la gráfica, se puede tomar algunos valores desde una tabla de valores. En la misma, deben tomar números reales para los cuales la expresión de la función de la función, tenga sentido. Recordar que este tipo de análisis, fue trabajado en unidades anteriores.

Ejemplo: Graficar la función $g(x) = x^2 - 2x - 3$

Vértice: $V = (h, k)$

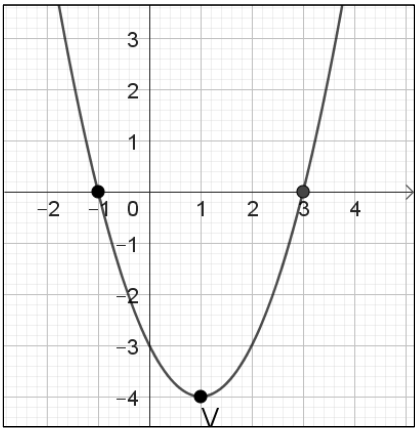
$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2.1} = 1$$

$$k = g(1) = 1^2 - 2.1^2 - 3 = -4$$

$$V = (1, -4)$$

Intersección con eje $y$: $c = -3$

Intersección con eje $x$: $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$ (comprobar)




## FUNCIONES IRRACIONALES

Las funciones irracionales son aquellas en las cuales la variable $x$ aparece afectada por una raíz. Se da la función $f$ a modo de ejemplo y a partir de la misma puede haber otras variantes, como analizaremos en el próximo ejemplo para graficar.

$$f: D \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

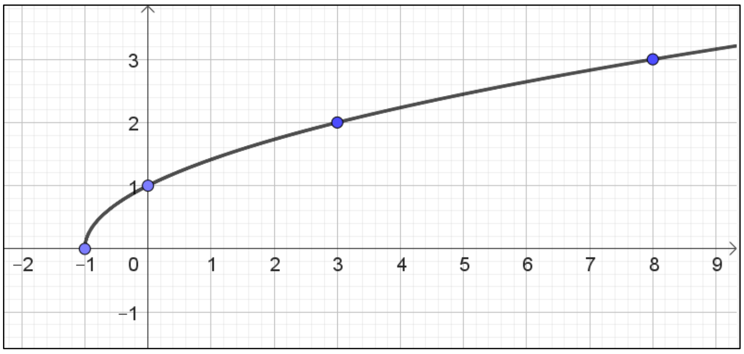
De ahora en adelante graficaremos las funciones a partir de tablas de valores, teniendo en cuenta los siguientes pasos:

1. Primero analizar, ¿qué valores puedo considerar en la tabla? Para esto, primero se debe analizar en qué subconjunto de los números reales, esta expresión tiene sentido (recordar ejercicio ya trabajado en unidades anteriores).
2. Construir la tabla de valores
3. Marcar en al gráfico cada punto de la tabla de valores.
4. Unir los puntos.

Ejemplo: Graficar la función $f(x) = \sqrt{x + 1}$.

Condición: $x + 1 \geq 0 \quad \to \quad x \geq -1$ ; ahora construimos la tabla y graficamos.

| $x \geq -1$ | $y = \sqrt{x+1}$ |
|---|---|
| $-1$ | $y = \sqrt{-1+1} = 0$ |
| $0$ | $y = \sqrt{0+1} = 1$ |
| $3$ | $y = \sqrt{3+1} = 2$ |
| $8$ | $y = \sqrt{8+1} = 3$ |




## FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones trigonométricas que vamos a trabajar, son aquellas en las cuales la variable $x$ aparece afectada por senos o cosenos. Se dan algunos ejemplos:

$$f: D \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x) = sen(x) + 1$$

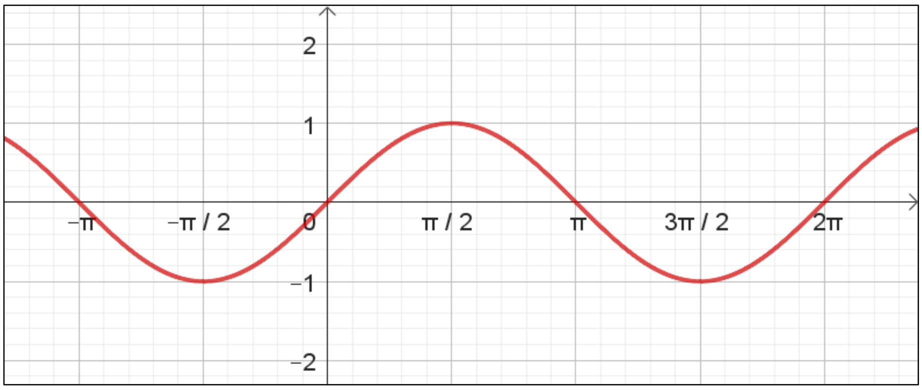
$$h: D \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad h(x) = cos(2x)$$

Graficaremos las funciones a partir de tablas de valores.

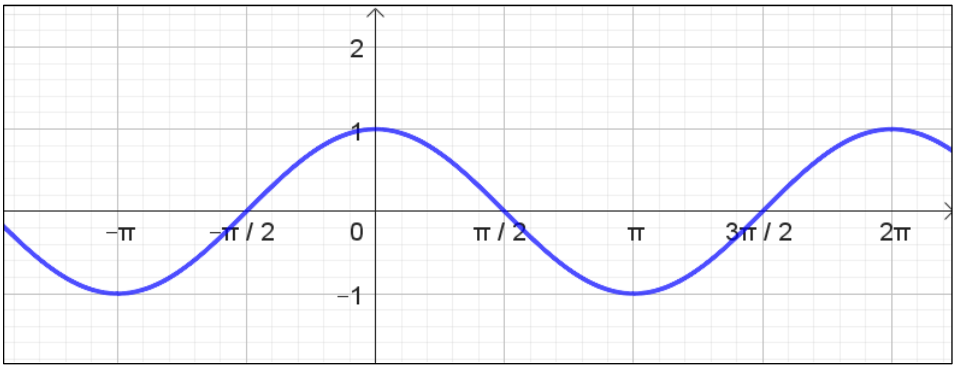
Nota: dado que para estas funciones los "valores de $x$" representan amplitudes de ángulos, entonces se deberá tener cuidado con la graduación del eje de abscisas. Si se toman las amplitudes de ángulos en el sistema radial, entonces pueden utilizar la misma graduación de siempre, o en ocasiones también la observarán por cada $\frac{\pi}{2}$ unidades.

Ejemplo: Observar las gráficas de las funciones seno y coseno. Te proponemos hacer para cada una la tabla de valores y corroborar la gráfica.

a) $h(x) = sen(x)$



b) $n(x) = \cos(x)$

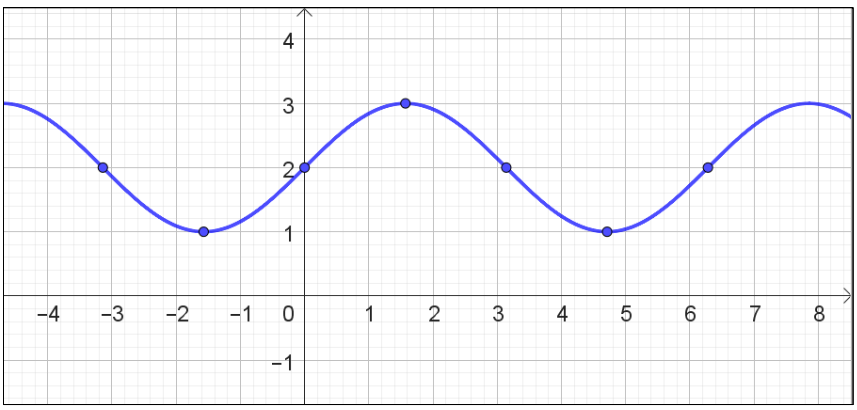



<u>Ejemplo</u>: Graficar la función $m(x) = sen(x) + 2$.

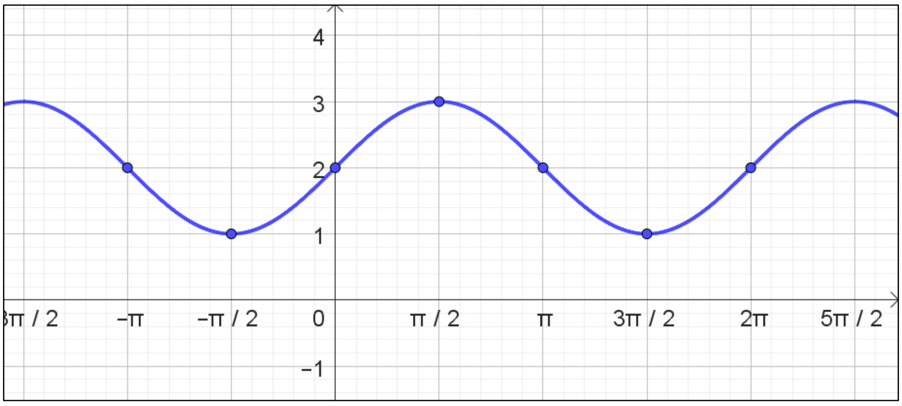
Dado que aquí no tenemos condiciones, construimos la tabla y graficamos.

| $x$ | Para marcar en el gráfico.. | $y = sen(x) + 2$ Poner calculadora en radianes y revisar con qué teclas cargar $\pi$ |
|---|---|---|
| $-\pi$ | $x \approx -3{,}14$ | $y = sen(-\pi) + 2 = 2$ |
| $-\frac{\pi}{2}$ | $x \approx -1{,}57$ | $y = sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2 = 1$ |
| $0$ | $x = 0$ | $y = sen(0) + 2 = 2$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $x \approx 1{,}57$ | $y = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 = 3$ |
| $\pi$ | $x \approx 3{,}14$ | $y = sen(\pi) + 2 = 2$ |
| $\frac{3}{2}\pi$ | $x \approx 4{,}71$ | $y = sen\left(\frac{3}{2}\pi\right) + 2 = 1$ |
| $2\pi$ | $x \approx 6{,}28$ | $y = sen(2\pi) + 2 = 2$ |

<u>Gráfica 1</u>: Con una graduación de uno en uno:



Gráfica 2: Graduando por cada $\frac{\pi}{2}$




## FUNCIONES EXPONENCIALES

Las funciones exponenciales, son aquellas en las cuales la variable $x$ aparece en el exponente de una potencia. Se dan algunos ejemplos:

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x) = 2^x + 1$$

$$h: D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad h(x) = 3^{x+5}$$

$$s: D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad s(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$$

- Graficaremos las funciones a partir de tablas de valores, y dado que las expresiones tienen sentido para todo número real, es que no habrá condiciones al momento de construirla.
- Las funciones exponenciales, tienen siempre asíntotas horizontales (recta paralela al eje $x$). Una asíntota (en forma intuitiva), es una recta a la cual la función se acerca en forma indefinida, pero sin llegar a cortarla o atravesarla. En los gráficos, se grafican con línea punteada, para distinguirlas de la función.
  En este caso, dado que la asíntota es una recta horizontal, presentan una ecuación de la forma $y = k$, siendo $k$ un número real, que está dado justamente por el término independiente de la expresión de la función. Entonces, para nuestros ejemplos las ecuaciones son:

$$f: \text{asíntota en } y = 1$$

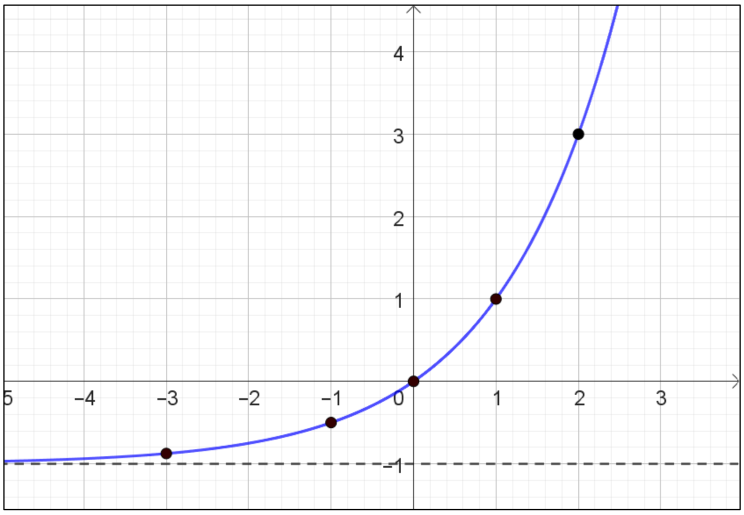
$$h: \text{asíntota en } y = 0 \ \text{(coincidente con eje } x\text{)}$$

$$s: \text{asíntota en } y = -3$$

Ejemplo: Graficar $t(x) = 2^x - 1$.

Asíntota: $y = -1$

| $x$ | $y = 2^x - 1$ |
|---|---|
| $-3$ | $y = 2^{-3} - 1 = -0{,}87$ |
| $-1$ | $y = 2^{-1} - 1 = -0{,}5$ |
| $0$ | $y = 2^0 - 1 = 0$ |
| $1$ | $y = 2^1 - 1 = 1$ |
| $2$ | $y = 2^2 - 1 = 3$ |




Ejercicio: Graficar las funciones $f, h$ y $s$ dadas como ejemplo al inicio de esta sección.

## FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Las funciones logarítmicas, son aquellas en las cuales la variable $x$ aparece afectada por un logaritmo. Se dan algunos ejemplos:

$$f: D \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x) = \log(x-2)$$

$$h: D \to \mathbb{R} \text{ dada por } h(x) = \ln(x) + 5$$

$$s: D \to \mathbb{R} \text{ dada por } s(x) = \log_3(x+1)$$

- Graficaremos las funciones a partir de tablas de valores, por lo tanto, se debe tener en cuenta que estas expresiones tienen sentido en los números reales siempre que el argumento del logaritmo sea mayor que cero.
- Cuando el logaritmo no sea decimal ni natural, recordar para la tabla de valores, el cambio de base.
- Las funciones logarítmicas, tienen siempre asíntotas verticales (recta paralela al eje $y$). En este caso, dado que la asíntota es una recta vertical, presentan una ecuación de la forma $x = k$, siendo $k$ un número real, que está dado justamente por el valor que anula el argumento del logaritmo. Entonces, para nuestros ejemplos las ecuaciones son:

$$f: \text{asíntota en } x = 2$$

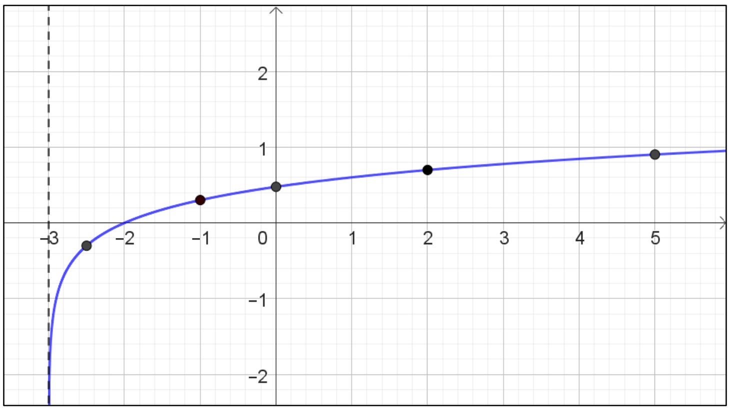
$$h: \text{asíntota en } x = 0 \text{ (coincidente con eje } y)$$

$$s: \text{asíntota en } x = -1$$

Ejemplo: Graficar $q(x) = \log(x + 3)$.

Asíntota: $x = -3$ (anula el argumento)

| $x$ | $y = \log(x + 3)$ |
|---|---|
| $-2{,}5$ | $y = \log(-2{,}5 + 3) = -0{,}3$ |
| $-1$ | $y = \log(-1 + 3) = 0{,}3$ |
| $0$ | $y = \log(0 + 3) = 0{,}47$ |
| $2$ | $y = \log(2 + 3) = 0{,}69$ |
| $5$ | $y = \log(5 + 3) = 0{,}9$ |




Ejercicio: Graficar las funciones $f$, $h$ y $s$ dadas como ejemplo al inicio de esta sección.


*Tener en cuenta que, si bien está permitido el uso de calculadora, en la hoja deben quedar las constancias de todas las operaciones y propiedades que han sido aplicadas para llegar al resultado final, esto permitirá validar el ejercicio.*

# PRÁCTICA N°1

**Ejercicio 1:** Indicar si son proposiciones o no, las siguientes oraciones.

Para las que sean proposiciones: identificar si son simples o compuestas y traducirlas a notación simbólica, utilizando símbolos lógicos.

a) ¿Qué hora es?
b) Marcos es geólogo o Beatriz es astrónoma.
c) La Tierra empezó su evolución hace 4700 millones de años.
d) Si Juan va al cine, entonces tiene dinero.
e) La escala de Ritcher mide magnitud y la escala de Mercalli mide intensidad.
f) ¡Buenos días!
g) No es cierto que la gravedad en los polos es mayor que en el ecuador.

**Ejercicio 2:** Sean $p$, $q$ y $r$ las proposiciones siguientes:

$p$: El sismo es de poca intensidad ; $q$: profundo

$r$: Hay destrucción de viviendas ; $s$: superficial

Traducir las siguientes oraciones a notación simbólica utilizando conectivos lógicos

a) El sismo es de poca intensidad y profundo
b) Si el sismo es de poca intensidad entonces no hay destrucción de viviendas
c) Si, el sismo es de gran intensidad y superficial, entonces no hay destrucción de viviendas
d) Si no hay destrucción de viviendas entonces el sismo es de poca intensidad
e) El sismo es de poca intensidad o hay destrucción de viviendas

**Ejercicio 3:** Sean $p$, $q$ y $r$ las proposiciones siguientes,

$p$: "está lloviendo" ; $q$: "el sol esta brillando" ; $r$: "hay nubes en el cielo"

Traducir la siguiente oración a notación simbólica utilizando conectivos lógicos

"Si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo"

Luego, complete la tabla:

| | Notación Simbólica | *Lenguaje coloquial* |
|---|---|---|
| Recíproca | | |
| *Contrarecíproca* | | |

**Ejercicio 4:** Resolver cada uno de los siguientes apartados.

I) Sea $U = \{1,2,3,9,11\}$ el conjunto referencial. Complete la siguiente tabla.

| | Valor de verdad para $x = 1$ | Valor de verdad para $x = 3$ | Valor de verdad para $x = 9$ | *Valor de verdad para* $x = 11$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(x)$: es impar | | | | |
| $Q(x): x > 3$ | | | | |
| $R(x): 2x < 5$ | | | | |

II) Sea $U = \{ 1, 2, 3, 9,11\}$ el conjunto referencial. Complete la siguiente tabla.

| | Valor de verdad para $x = 1, y = 3$ | Valor de verdad para $x = 3, y = 9$ | Valor de verdad para $x = 9 , y = 2$ | Valor de verdad para $x = 11, y = 9$ |
|---|---|---|---|---|
| $A(x, y)$ : $x$ es divisor de $y$ | | | | |
| $B(x, y): x + y < 20$ | | | | |

**Ejercicio 5:** Determine, en caso de ser posible, el valor de verdad de las siguientes funciones proposicionales, que se encuentran cuantificadas existencialmente o universalmente. Justifique los casos que sean falsos.

a) $(\forall x \in \mathbb{N})\ (x > 2)$

b) $(\forall x \in \mathbb{N})\ (x < 0)$

c) $(\exists x \in \mathbb{Z})\ (x > 8 \ \wedge \ x < 9)$

d) $(\exists x \in \mathbb{N})\ (x - 5 = 10)$

e) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (x > 2)$

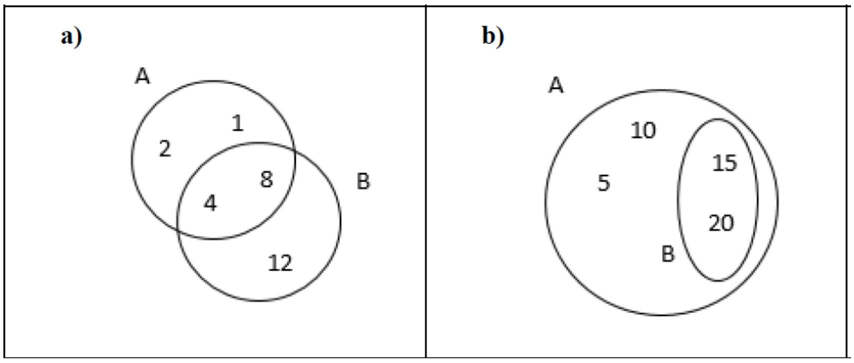
f) $(\forall x \in \mathbb{Z})(x^2 = 9)$

**Ejercicio 6**: Completar el siguiente cuadro indicando con una cruz donde corresponda.

| Conjunto | Finito | Infinito | Unitario | Vacío |
|---|---|---|---|---|
| $Z = \{x \in U: x$ es un día de la semana$\}$ | | | | |
| $P = \{x \in U: x$ es una vocal de la palabra vals$\}$ | | | | |
| $H = \{-1,5,7\}$ | | | | |
| $Q = \{x \in U: x$ es un habitante de la luna$\}$ | | | | |
| $A = \{x \in \mathbb{N}: 5 < x < 5\}$ | | | | |
| $V = \{x \in \mathbb{N}: -2. x = 8\}$ | | | | |

**Ejercicio 7**: Para cada uno de los siguientes diagramas de Venn, responder justificando,

a) ¿Es $A$ un subconjunto de $B$?
b) ¿Es $B$ un subconjunto de $A$?




**Ejercicio 8**: Para cada uno de los conjuntos dados, analizar si son finitos o infinitos, en base a esto expresarlos por extensión, comprensión o intervalo, según corresponda.

a) $A = \{x \in U: x \text{ es una vocal}\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{N}: x \leq 3{,}5\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{R}: x > -3\}$
d) $Z = \{x \in \mathbb{R}: x \text{ es par}\}$
e) $M = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 = 4\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{N}: x = 0\}$

Luego completar con el símbolo que corresponda:

$m$ ______ $A$ ; $4$ ______ $B$ ; $M$ ______ $C$ ; $S$ ______ $M$ ; $0$ ______ $S$ ; $M$ ______ S ; $\{3\}$ ______ $Z$

**Ejercicio 9**: Dados los conjuntos,

$$A = \{x \in \mathbb{N}: x < 11 \ \wedge \ x \ es \ impar\} \ ; \ B = \{x \in \mathbb{Z}: -2 < x \leq 8\} \ ; \ C = \{x \in \mathbb{R}: x^2 = 4\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{N}: x^2 = 4\} \ ; \ E = \{x \in \mathbb{R}: 2x = 8\} \ ; \ F = \{x \in \mathbb{R}: -4 < x\} \ ; \ G = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{N}_0: -3 \leq x < 8\} \ ; \ I = \{-2, 0, 5, 7\} \ ; \ J = \{x \in \mathbb{N}_0: x < 9\} \ ; \ K = \{-4\}$$

$$L = \{x \in \mathbb{Z}: -4 < x \leq 4 \ \wedge \ x \text{ es par}\}$$

a) Expresarlos por extensión o como intervalos, según corresponda.
b) Resolver las siguientes operaciones, acompañando con la gráfica que justifica su respuesta.

| | | |
|---|---|---|
| $B \cap E$ | $H \cup I \cup K$ | $E \cup F$ |
| $\bar{E}$ | $H \cap (I - J)$ | $(A \cap I) \cup K$ |
| $\bar{G} \cup C$ | $G \cap K$ | $L \cap A$ |
| $J \cup \bar{F}$ | $\overline{G \cup F}$ | $C \cap E$ |

**Ejercicio 10**: Resolver cada operación, justificando su respuesta con la gráfica correspondiente,

a) $[1,3) \cup (2,3] =$

b) $\overline{(-4,6]} =$

c) $[6,8) \cap \overline{[7,9)} =$

d) $\left(-1,\frac{1}{2}\right) \cup \left\{-1,\frac{1}{2}\right\} =$

e) $[4,9) \cap [9,11) =$

f) $(-\infty,1) - (0,\infty) =$

g) $\overline{(-3,5] \cap (2,3)} =$

h) $(2,3] - \overline{(-\infty,1)} =$

i) $(-\infty,4) \cap [-3,-1] =$

j) $\overline{(-3,\infty)} \cap (-\infty,-1] =$

**Ejercicio 11**: Analizar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. Las que sean falsas, resolverlas correctamente.

a) $x + x + x = x^3$

b) $x.x = 2x$

c) $(x-q)^2 = x^2 - 2xq + q^2$

d) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-4/5} : \left(-\frac{3}{4}\right)^{1/5} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{\left(-\frac{4}{5}\right):\left(\frac{1}{5}\right)}$

e) $\left(\frac{8}{5}\right)^0 = 0$

f) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

g) $\sqrt{25+9} = \sqrt{25} + \sqrt{9}$

h) $(2x^4).(-4x^2) = 8x^6$

i) $3x + 5y = 8x$

j) $\frac{x^3+4x^2}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} + 4 \cdot \frac{x^2}{x^2} = x + 4$

**Ejercicio 12**: Determinar un subconjunto de números reales, sobre los cuales las siguientes expresiones, tengan sentido en el conjunto de los números reales.

a) $\frac{8}{x+2}$

b) $\frac{4}{x^2-9}$

c) $\sqrt{x+6}$

d) $4^{x+1}$

e) $\sqrt[3]{x-1}$

f) $\frac{2}{x^2}$

g) $\frac{5}{x^3-1}$

h) $\frac{2}{\sqrt[3]{x+3}}$

**Ejercicio 13**: Resolver cada uno de los siguientes ejercicios combinados.

a) $\frac{-\frac{1}{5} + \left[\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)\right]}{-2} + \{[(-5)^3]^{-1}\}^0 =$

b) $\sqrt{\frac{5}{4} + 1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^0 : 2 - (7-9)^3 =$

c) $2^3 - \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2(5-10)\right] + \sqrt{2.8} - \sqrt{\frac{25}{100}} =$

d) $\sqrt{2^2.3^2} - \left(\frac{3}{5}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(3 - \frac{1}{2} : \frac{1}{6}\right) =$

e) $\left[-\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} + \frac{1}{3}\right] : \left[\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right] + 1 =$

f) $\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2 + \sqrt[3]{-1 + \frac{7}{8}} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 =$

# PRÁCTICA N°2

**Ejercicio 1**: Resolver cada una de las siguientes ecuaciones. En el caso de que resulten ecuaciones de grado dos, primero clasificar sus raíces por medio del discriminante y luego resolver.

a) $3 = \frac{8x-9}{2x-1}$

b) $x^2 - 4x = -13$

c) $x^2 = \frac{x+3}{2}$

d) $\frac{x-6}{3x+2} = x - 2$

e) $x^2 + 36 = 12x$

f) $\frac{x+3}{2} = \frac{2x+1}{3}$

g) $4 - 2x = -x^2$

h) $3(x - 12) = 7(x - 2) + 3$

i) $(x + 1)(x - 2) = 0$

j) $x^2 - x = 2$

k) $\frac{x-6}{10} = \frac{-1}{x}$

l) $x - \frac{x-1}{5} = 2x$

m) $x(x + 3) = 4$

n) $\frac{3x}{x-2} = \frac{2}{x+1}$

**Ejercicio 2**: Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

a) $3.\log_3(x - 2) = 9$

b) $\log_2(2x - 4) = \log_2(x + 1)$

c) $14 + \log_4(3x - 1) = 4^2$

d) $2^{5x-1} = 16$

e) $3^{x+2} = 4$

f) $5.e^{4x} + 1 = 6$

**Ejercicio 3**: Despejar en cada caso la variable $x$.

a) $\frac{x}{2} - y = \frac{2}{3}$

b) $y = \log_2(x + 5)$

c) $\frac{x-y}{2} = -1$

d) $\frac{2y}{(x-1)^2} = -1$

e) $y = e^{1-5x}$

f) $y = 1 + \ln(x - 5)$

g) $y = 4^{x-2} + 1$

h) $y = \frac{3}{3-x}$

i) $1 = \sqrt{\frac{y}{x}}$

**Ejercicio 4**: Resolver cada una de las siguientes inecuaciones. Escribir luego el conjunto solución.

a) $2x - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}x$

b) $\frac{x}{4} - \frac{x}{2} > 5$

c) $9 < 3 + 2x < 13$

d) $6 \leq 2 \cdot (-3x + 1) \leq 10$

e) $2x + 4 \geq 5x - \frac{1}{2}$

f) $x - 2.(1 + x) > 7$

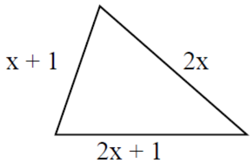
g) $\frac{x-5}{-2} < -3x$

**Ejercicio 5**: Resolver cada una de las siguientes situaciones problemáticas.

*Tener en cuenta: Cuando hablamos de porcentaje, el mismo corresponde “ a una parte de 100”. Si hablamos de un* 30%, *responde a:* $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

*Si necesito el 30% de 600, resuelvo:* $\frac{30}{100} \cdot 600 = 180$

a) ¿Cuál es el número cuya tercera parte, aumentada en $\frac{4}{5}$ del mismo, pero disminuida en 5 unidades, sobrepasa el 15 unidades el valor del número dado?
b) Ana y Marisa son mellizas. Luis tiene 4 años más que ellas y Juan la mitad de la edad de Luis. Si la suma de sus edades es 41, ¿qué edad tiene cada uno?
c) Si al cuadrado de un número natural se le resta su sucesor, se obtiene el cuadrado de su antecesor. ¿Cuál es ese número?
d) El perímetro del siguiente triángulo es igual a $12cm$. Identificar cuánto mide cada lado.




e) La longitud de los lados de un triángulo son números naturales consecutivos. Si el perímetro es de $18cm$, hallar la medida de todos los lados.
f) Una muestra de roca contiene cobre y otros minerales. Se sabe que el 30% del peso total de la muestra corresponde a cobre. Si la muestra contiene 6 $kg$ de cobre, ¿cuánto pesa la muestra completa?
g) Un estudiante de geología se encuentra pesando una roca, sabiendo que la masa de la misma es igual a su densidad por el volumen que ocupa. Si la masa es de 13,5 $kg$ y la roca tiene una densidad de 2,7$kg$ por litro, ¿qué volumen ocupa la roca?
h) En una práctica de campo, un grupo de estudiantes realiza una perforación vertical en el terreno que avanza a razón constante de 1,2 metros por minuto. ¿Cuántos minutos tardan en alcanzar una profundidad de 18 metros?
i) Calcular el valor del coeficiente $b$ en la ecuación $5x^2 + bx + 6 = 0$ sabiendo que una de las soluciones es $x_1 = 1$. ¿Cuál es la otra solución?

**Ejercicio 6**: Resolver las siguientes inecuaciones y escribir la solución de ser posible, como intervalo.

a) $|x + 3| < 5$
b) $|1 - 3x| \geq 3$
c) $\left|2x - \frac{1}{2}\right| \leq 3$
d) $\left|\frac{2+3x}{3}\right| < 1$
e) $\left|\frac{1-3x}{2}\right| > 2$

**Ejercicio 7**: Resolver cada una de las siguientes situaciones problemáticas.

a) Hallar los números naturales cuyo triple menos seis unidades es mayor que su duplo más cinco unidades.
b) ¿Qué números reales verifican que su cuadrado es menor que nueve?
c) María tiene 10 años menos que Pedro. ¿Cuántos años puede tener María, si sabemos que el triple de su edad es mayor que el doble de la de Pedro?
d) Si restamos dos unidades a los tres cuartos de un número, el resultado es mayor que si le sumamos cinco unidades a su mitad. Hallar los números reales que lo hacen posible.

**Ejercicio 8**: Resolver cada uno de los siguientes conjuntos y expresarlos, de ser posible, por extensión, comprensión o como intervalos (según corresponda).

a) $A = \{x \in \mathbb{Z}: |x - 2| = 3\} \cup \{x \in \mathbb{R}: 1 < x < 5\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R}: |2x - 1| < 3\} \cup \{x \in \mathbb{N}: |x + 1| = 3\}$

c) $B = \{x \in \mathbb{N}_0 : x^2 - 1 \leq 3\}$

d) $G = \{x \in \mathbb{N} : |2x| < 10\} \cap \{x \in \mathbb{Z} : |x| > 6\}$

e) $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x - 2| = 4\}$

f) $Q = \{x \in \mathbb{R} : |-2x| > 4\} \ \cap \ \{x \in \mathbb{N} : |x + 1| < 4\}$

g) $J = \{x \in \mathbb{Z} : \ |1 - x| \leq 2\ \}$

**Ejercicio 9**: Resolver en forma analítica, cada sistema de ecuaciones lineales. Luego clasificarlo. Si es compatible determinado dar la solución. Si es compatible indeterminado, escribir el conjunto solución y dos soluciones particulares.

a) $\begin{cases} 2x - 1 = y \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ -5x + 6y = 4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x - y = 12 \\ 2x + 3y = -8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3 = 2y \\ -2x + 4y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x = 10 - 3y \\ 12x = 10 - 9y \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$

**Ejercicio 10**: Resolver gráficamente cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales dados.

a) $\begin{cases} 2x - 1 = y \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = \frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$

**Ejercicio 11**: Resolver cada uno de los siguientes apartados.

a) Las soluciones de la ecuación $7x^2 + bx + c = 0$ son $x_1 = 5$ y $x_2 = -6$. Hallar el valor de los coeficientes de $b$ y $c$.
b) La edad de Juan es el quíntuplo de la edad de Carlos, y la suma de ambas es 78. ¿Qué edad tiene cada uno?
c) Si se aumenta en 2cm el largo y el ancho de un rectángulo, el perímetro es 24cm. Si el largo se disminuye en 2cm resultará un cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?
d) Un grupo de 20 personas, después de una caminata, encontró un árbol con 49 naranjas. Cada hombre comió 3, cada mujer 1 y sólo quedó una naranja en el árbol. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres hay?
e) En una clase, el 70% son chicos. Además, se sabe que hay 12 chicas menos que chicos. ¿Cuántas chicas y chicos hay?
f) En una jaula donde hay conejos y palomas, se contabilizan 35 cabezas y 94 patas. ¿Cuántos animales de cada clase hay?
g) Un lado de un triángulo isósceles mide 3cm menos que la suma de los dos lados iguales. El perímetro es de 33cm. ¿Cuánto mide cada lado?

# PRÁCTICA N°3

**Ejercicio 1**: Completar el siguiente cuadro.

| Polinomio | Coeficiente principal | Grado | Completar y ordenar en forma decreciente |
|---|---|---|---|
| $P(x) = -7x^3 + 8x^2 + 20x^5 + x$ | | | |
| $Q(x) = 1 + x^2 - x^6 + 3$ | | | |
| $R(x) = \sqrt{2}\,x^7 + 9x^2 + 5$ | | | |
| $N(x) = x^2 + 3x - 4x^3 + 2$ | | | |
| $T(x) = x^3 + 3x^5 - 2$ | | | |

**Ejercicio 2**: Hallar el valor numérico de los siguientes polinomios e indicar si el valor dado, es raíz del mismo.

a) $P(x) = x^2 + 3x - 4 \;\; ; \;\; x = 1$
b) $R(x) = 3x + x^2 - 4x^3 + 2 \;\; ; \;\; x = 0$

**Ejercicio 3**: A partir de los siguientes polinomios, resolver luego todas las operaciones pedidas. En el caso de divisiones, indicar el cociente y el resto.

$$R(x) = 2x + 2 \;;\; N(x) = x^3 - 2x^4 - 3x^2 + 1 \;;\, Q(x) = 3x^2 - 2x + 4 \;; H(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$P(x) = 4x^2 - 1 \;;\; S(x) = 5x + x^3 - 4 \;;\; U(x) = x + 3 \;;\; A(x) = 2 - x^3 - x$$

$$G(x) = 2x^4 + x^3 - 2x + 1 \;;\; D(x) = x^2 - x + 2$$

Resolver:

a) $N(x) + A(x) - S(x)$
b) $N(x).P(x) + A(x)$
c) $N(x) : H(x)$
d) $U(x) + 2\,[S(x) - A(x)]$
e) $S(x) : Q(x)$
f) $2P(x) - S(x).Q(x)$
g) $\left(R(x)\right)^2 - N(x)$
h) $G(x) : D(x)$
i) $\frac{1}{2}Q(x) + \left(H(x)\right)^2$
j) $N(x) : S(x)$

**Ejercicio 4**: Aplicar la regla de Ruffini para resolver las siguientes divisiones y verificar el teorema del resto.

a) $P(x) = -11x^2 + 7x^3 + 45 - 12x \;\; ; \;\; Q(x) = x - 3$. Hallar: $P(x): Q(x)$
b) $S(x) = 4x + x^2 + 6 \;;\; T(x) = x + 2$. Hallar $S(x): T(x)$

**Ejercicio 5**: Sin realizar la división, analizar si los siguientes polinomios son divisibles. No olvide justificar siempre sus respuestas.

a) $P(x) = x^3 + 1$ en $Q(x) = x - 1$
b) $R(x) = x^2 + 6x + 3$ en $B(x) = x + 3$

**Ejercicio 6**: Resolver los siguientes apartados

a) Si $H(x) = mx^3 + 6x^2 + 100$ siendo $m \in \mathbb{Z}$; analizar si 5 es un cero de dicho polinomio.
b) Hallar el valor de $k$ para que el polinomio $F(x) = kx^3 + 2x^2 - 1$ sea divisible en $Z(x) = x + 1$
c) Determinar el valor de $b$ para el cual el polinomio $M(x) = x^6 + bx^3 - 5x^2 - 7$ tiene resto 3 en la división por $x + 2$.
d) Calcular el valor de $a$ para que el polinomio $x^2 + ax + a$ tenga la raíz $x = -3$.
e) Encontrar el valor de $k$ para que al dividir $2x^2 - kx + 2$ en $x - 2$, el resto sea 4.

**Ejercicio 7**: Factorizar los siguientes polinomios, teniendo en cuenta el teorema Fundamental del Álgebra.

a) $Q(x) = x^2 - 2x + 1$
b) $R(x) = (x^2 - 3x - 4)(x - 1)$
c) $S(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2$
d) $C(x) = (x^2 - 1).(x^2 + 2x + 1)$
e) $N(x) = 2x^3 + 2x^2 - 32x + 40$
f) $T(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$
g) $S(x) = (x^2 + 2x - 3)\left(2x - \frac{1}{2}\right)(3x + 1)$
h) $M(x) = 2x^3 + 2x - 12$
i) $D(x) = 2x^3 - 18x$
j) $U(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$
k) $P(x) = -2x - 8$
l) $S(x) = 4x^3 + 8x^2$
m) $S(x) = (2x - 10)(x^2 - 25)$
n) $Z(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

**Ejercicio 8**: Resolver las operaciones que sean pedidas y simplificar a la mínima expresión. *No olvidar que, para simplificar, primero hay que factorizar el polinomio*.

a) $\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-x} =$
b) $\left(x - \frac{3}{x-2}\right) : \left(1 - \frac{1}{x-2}\right) =$
c) $\frac{2x}{x+3} + \frac{5}{x^2+6x+9} =$
d) $\frac{9x+27}{x^3+6x^2+9x} : \frac{9x-27}{2x^3-18x} =$
e) $\frac{x^4-y^4}{x^2-y^2} =$
f) $\frac{x^2-2x}{x^2+x-2} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+x-6} =$
g) $\frac{x^2-6x+9}{5x-15} \cdot \frac{3x^2-27}{4x+12} =$
h) $\frac{2x-2}{x^2-x} + \frac{3}{x} =$
i) $\frac{x+2}{x^2+4x+4} : \frac{x^2-4}{x-2} =$
j) $\frac{x^2-1}{(x-1)^2} \cdot \frac{3x-3}{x+1} =$

# PRÁCTICA N°4

Ejercicio 1:

a) Expresar en radianes los ángulos: 210° ; 70° ; 18°
b) Expresar en el sistema sexagesimal: $\frac{7}{6}\pi \ rad$ y $3{,}5 \ rad$.

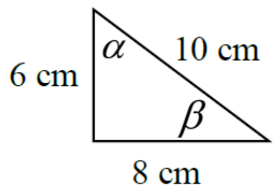
Ejercicio 2: ¡A practicar con la calculadora! *Cuidado* con la selección del modo correcto.

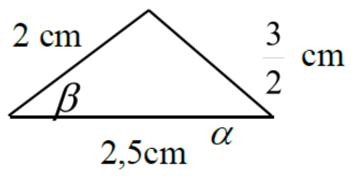
Resolver lo pedido y luego responder, ¿entre qué valores varían el seno y el coseno?

a) $sen(30°)$
b) $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$
c) $tg(102°)$
d) $\cos(160°20'40'')$
e) $\sec(4{,}8)$
f) $sen(4{,}5)$
g) $\cos(10{,}8)$
h) $sen(30°\ 56')$
i) $tg\left(\frac{\pi}{4}\right)$
j) $cosec(20°)$
k) $sen\left(\frac{2}{3}\pi\right)$

Ejercicio 3: Resolver cada uno de los siguientes apartados.

a) Dos de los ángulos interiores de un triángulo miden 60° y $\frac{\pi}{4}$ rad. Calcular la medida del tercer ángulo interior en grados sexagesimales.
b) Encontrar los ángulos de un triángulo rectángulo sabiendo que los catetos miden 20cm y 35cm.
c) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20cm y uno de los catetos 15cm. Determinar la medida de los ángulos.
d) En cada uno de los siguientes triángulos rectángulos calcular el seno, coseno y tangente de los ángulos agudos.

**a)**



**b)**



e) Sea un triángulo rectángulo con vértices en $a, b, c$. Siendo $\hat{a}$ el ángulo recto. Los segmentos $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$ miden 2m y 4m respectivamente. Calcular la medida del segmento restante y de los dos ángulos agudos.

Ejercicio 4: Determinar $\alpha$ sabiendo que,

a) $sen(\alpha) = -\frac{1}{3}$ ; $\alpha \in III \ cuad.$
b) $cos(\alpha) = -0{,}65606$ ; $\alpha \in III \ cuad.$
c) $tg(\alpha) = -2$ ; $\alpha \in IV \ cuad.$
d) $sen(\alpha) = 0{,}69465$ ; $\alpha \in II \ cuad.$
e) $tg(\alpha) = 2{,}5$ ; $\alpha \in I \ cuad.$
f) $sen(\varepsilon) = 0{,}5$ ; $\varepsilon \in II \ cuad.$

Ejercicio 5: Resolver cada apartado SIN HALLAR la amplitud del ángulo.

a) Sea $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$ ; $\alpha \in IV\ cuad$. Hallar $sen(\alpha)$, $tg(\alpha)$.
b) Sea $\text{sen}(\beta) = \frac{3}{4}$ ; $\beta \in II\ cuad$. Hallar $cos(\beta)$, $tg(\beta)$.
c) Sea $\cos(\alpha) = -\frac{3}{5}$ ; $\alpha \in II\ \ cuad$. Hallar $sen(\alpha)$, $tg(\alpha)$.
d) Sea $\text{sen}(\beta) = \frac{1}{2}$ ; $\beta \in II\ cuad$. Hallar $cos(\beta)$, $cotg(\beta)$.

Ejercicio 6: Calcular todas las razones trigonométricas en cada caso.

a) $tg(\theta) = 4$ ; $\theta \in III\ cuad$
b) $\cos(\varphi) = -\frac{3}{5}$ ; $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$
c) $tg(\alpha) = -2$ , $\alpha \in IV\ \ cuad$
d) $sen(\varepsilon) = \frac{1}{3}$ ; $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$
e) $cosec(\beta) = -\frac{3}{2}$ ; $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$
f) $\cos(\beta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; $\beta \in III\ cuad$.

Ejercicio 7:

a) Desde un avión que vuela a 500m de altura se divisa una boya. La visual dirigida desde el avión a la boya forma con la vertical un ángulo de 45°. Determinar a qué distancia de la boya se encuentra el avión.
b) Un dirigible que está volando a 800 metros de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia se encuentra del pueblo?
c) ¿Qué altura debe tener un poste que sostendrá una antena si uno de los cables que la sujeta tiene de longitud 19 m y forma un ángulo de 65° con el piso?
d) Un árbol se quebró y su extremo superior forma con el piso un ángulo de 48° si éste quedó a una distancia de 7m de la base del árbol. ¿Cuánto mide el árbol?
e) Se desea sujetar un poste de 20m de altura con un cable que parte de la parte superior del mismo hasta el suelo, formando un ángulo de 30° con el piso para cumplir las normas de seguridad. ¿Qué costo tiene el cable si cada metro cuesta $12?. ¿Cuál es el ángulo que forma el cable con el poste?
f) Necesito conocer cuantos metros debo caminar para llegar a un edificio. Conozco que, si camino un metro, los metros que me faltan para llegar, coinciden con la altura del edificio. Sabiendo que el ángulo de elevación (desde el suelo) en el punto donde estoy, es de 30°, ¿cuántos metros debo caminar en total?, ¿cuál es la altura del edificio?

# PRÁCTICA N°5

**Ejercicio**: Para cada una de las siguientes funciones,

$$f: D \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \frac{2}{3}x - 5$$

$$g: D \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$s: D \to \mathbb{R} \text{ tal que } s(x) = \ln(x + 4)$$

$$q: D \to \mathbb{R} \text{ tal que } q(x) = \cos(3x)$$

$$n: D \to \mathbb{R} \text{ tal que } n(x) = 3x + 2$$

$$d: D \to \mathbb{R} \text{ tal que } d(x) = \sqrt{x - 3}$$

$$r: D \to \mathbb{R} \text{ tal que } r(x) = \log_2(x - 1)$$

$$c: D \to \mathbb{R} \text{ tal que } c(x) = 2^x + 1$$

$$z: D \to \mathbb{R} \text{ tal que } z(x) = sen(x) + 2$$

$$m: D \to \mathbb{R} \text{ tal que } m(x) = 3.\sqrt{x}$$

$$a: D \to \mathbb{R} \text{ tal que } a(x) = 3^x - 4$$

$$h: D \to \mathbb{R} \text{ tal que } h(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$p: D \to \mathbb{R} \text{ tal que } p(x) = 2\cos(x)$$

a) Clasificarla.
b) Realizar una precisa representación gráfica. Utilice un sistema de ejes cartesianos diferente para cada función. N*o olvidar que: en funciones lineales no usamos tablas de valores y que siempre deben graduar los ejes.*