UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DOCUMENTO TEÓRICO PRÁCTICO CORRESPONDIENTE AL MÓDULO MATEMÁTICA

CURSO DE INGRESO

- **LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**
- **LICENCIATURA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN**
- **LICENCIATURA EN BIOLOGÍA**
- **LICENCIATURA EN CIENCIAS GEOLÓGICAS**
- **LICENCIATURA EN FÍSICA**
- **LICENCIATURA EN GEOFÍSICA**
- **LICENCIATURA EN ASTRONOMÍA**
- **TECNICATURA UNIVERSITARIA EN PROGRAMACIÓN WEB**

Contenido

CONSEJOS PARA TENER EN CUENTA ANTES DE EMPEZAR:

- ✓ ***LEER CON MUCHA ATENCIÓN LOS CONTENIDOS.***
- ✓ ***PONER ÉNFASIS EN LOS EJEMPLOS.***
- ✓ ***REALIZAR UNA INTERPRETACION A CONCIENCIA DE LOS ENUNCIADOS DE CADA UNA DE LAS ACTIVIDADES Y/O EJERCICIOS PROPUESTOS.***
- ✓ ***RESOLVER MINUCIOSAMENTE LOS EJERCICIOS ADICIONANDO ADEMÁS, PARA SU CONTROL, LOS CÁLCULOS AUXILIARES QUE SURGIERAN.***
- ✓ ***SIEMPRE CONSULTAR LAS DUDAS QUE TENGAN, NINGUNA DUDA CARECE DE IMPORTANCIA.***

UNIDAD 1

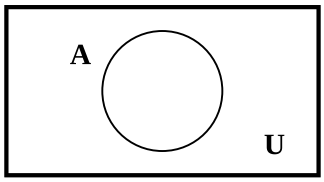
Conjuntos

NOCIÓN INTUITIVA DE CONJUNTO

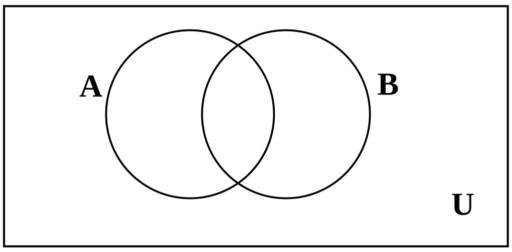
La palabra **CONJUNTO** nos remite, intuitivamente a una agrupación o colección de objetos que reciben el nombre de elementos. Un conjunto es cualquier colección (finita o infinita) de elementos de cualquier naturaleza.

Todo conjunto está inmerso en otro conjunto llamado Universal. Se denotan con letras mayúsculas y a sus elementos con minúsculas. Es usual representarlos por medio de Diagramas de Venn.

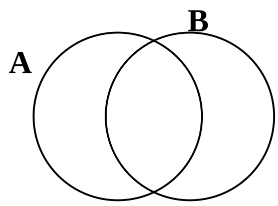
Consideremos en los casos correspondientes dos Conjuntos Ay B.



El diagrama de Venn más general para representar dos conjuntos cualesquiera es:



ó simplemente



Los diagramas de Venn sólo se utilizan para representar gráficamente conjuntos **finitos.**

No importa el orden en el cual los elementos del conjunto se colocan. Los mismos, deben estar separados por coma y no se pueden repetir elementos.

FORMAS DE DEFINIR UN CONJUNTO

Si queremos indicar el conjunto de las vocales podemos escribir:

$$A = \{x \,/\, x \text{ sea una vocal}\} \quad \text{ó} \quad A = \{a, e, i, o, u\}$$

Un conjunto está definido por **extensión o enumeración, cuando entre llaves figuran** todos sus elementos.

Ejemplos:

a) $A = \{a, e, i, o, u\}$

b) $B = \{lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo\}$

Un conjunto está definido por **comprensión,** cuando se enuncia la propiedad que caracteriza a sus elementos.

Ejemplos:

a) $A = \{x \,/\, x \text{ } sea\ una\ vocal\}$ **b)** $B = \{x \,/\, x\ es\ día\ de\ la\ semana\}$

CONJUNTOS NOTABLES

Conjunto Vacío: se simboliza con $\emptyset$ y es aquel conjunto que no posee elementos.

Ejemplo: $A = \{números\ impares\ entre\ 5\ y\ 7\} = \emptyset$

No existe ningún número impar entre los números 5 y 7.

Conjunto Universal: se simboliza con ***U*** y es aquel conjunto que contiene todos los elementos del tema en estudio; por lo tanto no es fijo y se debe fijar de antemano.

Nota: Si un conjunto tiene **n** elementos, se dice que es **finito**, caso contrario el conjunto es **infinito**.

PERTENENCIA, INCLUSIÓN Y OPERACIONES CON CONJUNTOS

En el siguiente cuadro presentamos algunas notaciones en lenguaje simbólico y su traducción al lenguaje coloquial.

$x \in A$ $x \notin A$	"El elemento x pertenece al conjunto A" o "En el conjunto A está el elemento x" "El elemento x no pertenece al conjunto A" o "En el conjunto A no está el elemento x"
$A \subseteq B$ $A \nsubseteq B$	"A es un subconjunto de B" o "A está contenido en B" o "B contiene a A" "A no es un subconjunto de B" o "A no está contenido en B" o "B no contiene a A"
$A \cup B$	"A unión B" está definido como: $A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$
$A \cap B$	"A intersección B" está definido como: $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$
$A - B$	"A menos B" está definido como: $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$
$\bar{A} = A^C$	"complemento de A" está definido como $\bar{A} = \{x/x \in U \wedge x \notin A\}$

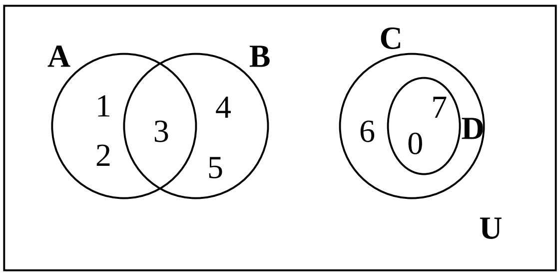
Ejemplos:

a) $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$

b) $\{2, 4, 6\} \subseteq \{2, 4, 6, 8\}$

c) $\{1, 3, 6, 7\} \nsubseteq \{1, 3, 6, 9\}$

d) $U = \{x \,/\, x \in N_0\ y\ x \leq 7\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$



$A \subseteq U$

$B \subseteq U$

$C \subseteq U$

$D \subseteq U$

$D \subseteq C$

Observación: Para cualquier conjunto A se verifica que:

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$
- $A \subseteq U$

La **pertenencia** vincula **elementos** con **conjuntos** y la **inclusión** vincula **conjuntos** con **conjuntos.**

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Las operaciones con conjuntos verifican las siguientes propiedades:

- **Propiedad conmutativa**

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cap B = B \cap A$

- **Propiedad asociativa**

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- **Propiedad distributiva**

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- **Propiedad de idempotencia**

a) $A \cup A = A$

b) $A \cap A = A$

- **Leyes de De Morgan**

a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

b) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Conjuntos Numéricos

❖ **Números Naturales: N**

Los números naturales fueron los primeros que utilizó el ser humano para contar objetos. El conjunto de los números naturales tiene infinitos elementos y una manera no apropiada de simbolizarlo (pues los conjuntos infinitos no se pueden escribir por extensión es:

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4,5, \dots..\}$$

Los puntos suspensivos indican que en N no hay último elemento, pero sí existe primer elemento que es el número 1 y además todo número natural, llamémosle x, tiene su número natural consecutivo o siguiente, $x + 1$.

La manera correcta de escribir el conjunto de los números naturales es por comprensión, como sigue:

$$\boldsymbol{N} = \{x: x\ es\ un\ número\ natural\}$$

Al conjunto de los naturales con el cero incluido, se puede simbolizar (de manera no apropiada):

$$\boldsymbol{N_0} = \{0,1, 2, 3, 4,5, \dots..\}$$

Por comprensión este conjunto se expresa como:

$$\boldsymbol{N_0} = \{x: x\ es\ un\ número\ natural\ ó\ cero\}$$

Los números naturales constituyen un conjunto **cerrado** para las operaciones de **suma** y **multiplicación** ya que, al operar con cualquiera de sus elementos, el resultado siempre será un número natural:

$5 + 6 = 11;\ 8.5 = 40.$

No ocurre lo mismo, en cambio, con la **resta**; por ejemplo $8 - 3$ es un número natural, pero $3 - 8$ no es un número natural; como consecuencia de ello surgen los **números negativos.**

❖ **Números enteros:** Z

Los **números enteros** abarcan a los números **naturales**, el **cero** y a los **números negativos**.

Una manera no apropiada (por ser un conjunto infinito) de escribir este conjunto es:

$$\boldsymbol{Z} = \{\dots..,-5,-4,-3,-2,-1,0,1, 2, 3, 4,5, \dots..\}$$

La forma correcta de escribir este conjunto es por comprensión y es de la forma:

$$\boldsymbol{Z} = \{x: x\ es\ un\ número\ entero\}$$

Todo número natural es un número entero.

Los números enteros permiten expresar cantidades negativas como un saldo deudor en una cuenta bancaria, un año de la era antes de Cristo, el número de una planta del sótano de un edificio, la representación de profundidades bajo el nivel del mar, temperaturas bajo cero, etc.

El conjunto de los números enteros es **cerrado** para la suma, la resta y el producto; sin embargo, la división de dos números a/b no siempre es un número entero. Es por ello que surge el conjunto de los números fraccionarios o racionales.

❖ **<u>Números racionales</u>: Q**

Se llama **números racional** a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros con denominador **distinto de cero**.
El término «racional» alude a «ración» o «parte de un todo».
Un número racional es un decimal finito o infinito periódico; por ejemplo, el número decimal finito 0,75 es la representación decimal del número racional $\frac{3}{4}$ y el número decimal infinito periódico 0,333... es la representación decimal del número racional $\frac{1}{3}$.

Luego, un número es racional si verifica alguna de las siguientes condiciones:

- *es un número entero (positivo, negativo o 0).*
- *es un número fraccionario.*
- *es un número decimal, con un número finito de cifras.*
- *es un número decimal periódico.*

❖ **<u>Números irracionales</u>: I**

Los números decimales que tienen infinitas cifras no periódicas, se denominan **números irracionales**: π, $\sqrt{2}$, e, $\sqrt{3}$, etc.

❖ **<u>Números reales</u>: R**

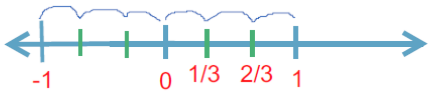
El conjunto formado por los números irracionales y racionales es el conjunto de los **números reales**.
Todo número natural es un número real.
Todo número entero es un número real.
Todo número racional es un número real.
Todo número irracional es un número real.

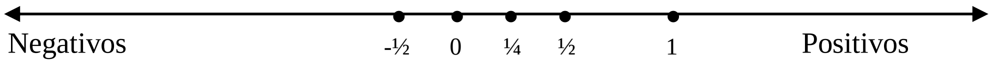
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS REALES

Los números reales se representan geométricamente en la recta numérica, esto es, se indica sobre una recta un punto fijo **O** que se llama **origen** y que corresponde al número real cero.
Considerando un segmento unitario como unidad de medida, a la derecha de **O** se indican los puntos que corresponden a los números reales positivos ($\mathbf{R}^+$) y a la izquierda de **O** los puntos que corresponden a los números reales negativos ($\mathbf{R}^-$).

De esta manera, a cada número real le corresponde un único punto de la recta, y a cada punto de la recta, un único número real. Para representar gráficamente un número fraccionario en la recta numérica, se divide la unidad en tantas partes como lo indique el denominador de la fracción y luego se toman tantas partes de la subdivisión como lo indique el numerador.

Ejemplos:





A tener en cuenta!!!

Entre dos naturales siempre hay un número finito de naturales entre ellos.

Entre dos números enteros hay un número finito de enteros entre ellos.

Entre dos números racionales hay infinitos racionales entre ellos.

Entre dos números reales hay infinitos reales entre ellos.

- **R** *REALES*
  - **Q** *Racionales*
    - **Z** *Enteros*
      - **N** *Naturales*
      - *Enteros Negativos*
    - *Fraccionarios*
  - *Irracionales*

Números Complejos: C

Al tratar de resolver igualdades como $x^2 + 4 = 0$, aparecen expresiones como $\sqrt{-4}$ que no es posible resolver en el conjunto de los números reales, ya que ningún número real elevado al cuadrado es igual a –4. Por ello surgieron los **números imaginarios** para que sea posible la radicación de números reales negativos: $\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4}\,.\sqrt{-1}$ $= 2.i$

Se denomina **unidad imaginaria** a **i =** $\sqrt{-1}$ y es tal que $\mathbf{i}^2 = -1$

Los números complejos son combinaciones algebraicas de números reales con números imaginarios.

Todo número natural es un número complejo.

Todo número entero es un número complejo.

Todo número racional es un número complejo.

Todo número irracional es un número complejo.

Todo número real es un número complejo.

OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

❖ **<u>Suma o resta de números fraccionarios</u>**

A) Fracciones de igual denominador

Para sumar (o restar) dos números fraccionarios de igual denominador se procede de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}}$$

<u>Ejemplos</u>:

a) $\frac{3}{5} + \frac{9}{5} = \frac{3+9}{5} = \frac{12}{5}$

b) $\frac{3}{5} - \frac{9}{5} = \frac{3-9}{5} = \frac{-6}{5}$

B) <u>Fracciones de distinto denominador</u>

Para sumar (o restar) dos números fraccionarios de igual denominador se procede de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(m:b).a \pm (m:d).c}{m}\text{; donde} \qquad \mathbf{m = m.c.m(b,d)}$$

<u>Ejemplos</u>:

a) $\frac{3}{5} + \frac{9}{15} = \frac{3.3+1.9}{15} = \frac{9+9}{15} = \frac{18}{15}$

b) $\frac{3}{5} - \frac{9}{15} = \frac{3.3-1.9}{15} = \frac{9-9}{15} = \frac{0}{15} = 0$

❖ **<u>Multiplicación de números fraccionarios</u>**

Para multiplicar dos números fraccionarios se procede de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}}$$

En la multiplicación de fracciones se simplifica cruzado.

<u>Ejemplos:</u>

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2.5}{3.7} = \frac{10}{21}$

b) $\frac{8}{9} \cdot \frac{15}{4} = \frac{8.15}{9.4} = \frac{\overset{10}{\cancel{120}}}{\underset{3}{\cancel{36}}} = \frac{10}{3}$

Si se simplifica antes de multiplicar se obtiene: $\frac{8}{9}\cdot\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{3}{\cancel{4}}}=\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}\cdot\frac{5}{1}=\frac{2.5}{3.1}=\frac{10}{3}$

❖ <u>División de números fraccionarios</u>

Para dividir dos números fraccionarios se procede de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.c}}$$

En la división de fracciones se simplifica horizontal.

Ejemplos:

a) $\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{2.7}{3.5}=\frac{14}{15}$

b) $\frac{16}{3}:\frac{8}{5}=\frac{16.5}{3.8}=\frac{\cancel{80}}{\cancel{24}}=\frac{10}{3}$

Si se simplifica antes de multiplicar se obtiene: $\frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{3}:\frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{5}=\frac{2}{3}:\frac{1}{5}=\frac{2.5}{3.1}=\frac{10}{3}$

❖ <u>Potenciación de números fraccionarios</u>

a) De exponente natural:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\text{ , con } b\neq 0$$

b) De exponente entero negativo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}\text{ , con } b\neq 0,\ a\neq 0$$

En particular: $(a)^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}$ con $a\neq 0$

<u>**Ejemplos:**</u>

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4^2}{3^2}=\frac{16}{9}$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{1}\right)^2=\frac{4^2}{1^2}=\frac{16}{1}=16$

d) $(-3)^{-2}=\left(\frac{-1}{3}\right)^2=\frac{(-1)^2}{3^2}=\frac{1}{9}$

❖ **<u>Radicación de números fraccionarios</u>**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\text{, con } b\neq 0$$

Si **n es par** entonces $\frac{a}{b}$ debe ser **mayor o igual a cero**.

<u>Ejemplos</u>:

a) $\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}=\frac{3}{5}$

b) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}=-\frac{2}{3}$

Propiedades de algunas operaciones

❖ **Propiedad distributiva del producto respecto a la suma:**

$$(a+b)\bullet c=a\bullet c+b\bullet c \quad \text{con } a,b,c\in \mathbb{R}$$
$$a\bullet(b+c)=a\bullet b+a\bullet c \quad \text{con } a,b,c\in \mathbb{R}$$

❖ **Propiedad distributiva del cociente respecto a la suma:**

$$(a+b):c=a:c+b:c \quad \text{con } a,b,c\in \mathbb{R} \quad c\neq 0$$

❖ **Propiedades de la potenciación:**

$a^0=1$, con $a\neq 0$

$1^n=1$

Potencia de un producto: $(a\bullet b)^p=a^p\bullet b^p$; con $p\in \mathbb{Q}$

Potencia de un cociente $\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$; con $p\in \mathbb{Q}$ $b\neq 0$

Potencias de potencias: $(a^p)^q=a^{p\cdot q}$; con p y $q\in \mathbb{Q}$

Producto de potencias de igual base: $a^m\bullet a^p=a^{m+p}$

Cociente de potencias de igual base: $\frac{a^m}{a^p}=a^{m-p}$; con $a\neq 0$

❖ **Propiedades de la radicación:**

Radicación de un producto: $\sqrt[n]{a.b}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

Radicación de un cociente: $\sqrt[n]{a:b}=\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$, con $b\neq 0$

Radicación como potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{5} . \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{5+(-3)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2} = \frac{9}{16}$

b) $z^{2}.z^{-1}.z^{-3}.z^{5} = z^{3}$

c) $3^{2}.3^{-3}.3^{-4}.3 = 3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{4} = \frac{1}{81}$

d) $b^{5} : b^{2} = b^{5-2} = b^{3}$

e) $\frac{y^{6}}{y^{7}} = y^{6-7} = y^{-1} = \frac{1}{y}$

f) $\frac{5^{3}}{(7-2)^{3}} = 5^{3-3} = 5^{0} = 1$

g) $\left(2^{2}\right)^{3} = 2^{2.3} = 2^{6} = 64$

h) $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{4}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \frac{16}{81}$

Cuidado !!!

La potenciación y la radicación no son distributivas ni respecto de la suma ni respecto de la resta

Éste es un error muy frecuente entre los estudiantes del nivel medio. Por ello proponemos comparar los siguientes cálculos

sí !!! no...!!!

Cálculos correctos	Cálculos incorrectos
$(2 + 3)^{2} = 5^{2} = 25$	$(2 + 3)^{2} = 2^{2} + 3^{2} = 4 + 9 = 13$
$(7 - 4)^{2} = 3^{2} = 9$	$(7 - 4)^{2} = 7^{2} - 4^{2} = 49 - 16 = 33$
$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$	$\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
$\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$	$\sqrt{25-16} = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$

La radicación y potenciación NO distribuyen respecto de la suma o resta.

ORDEN EN EL CONJUNTO R

R es un conjunto ordenado. Esto es, dados dos números reales a y b vale una y solo una de las siguientes afirmaciones

$$\mathbf{a < b,\ \ a > b \ \ o \ \ a = b}$$

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD EN R

2) Si sumamos o multiplicamos a ambos miembros de una igualdad una misma constante se obtiene otra igualdad:

Si a = b, entonces a + c = b + c

Si a = b, entonces a.c = b.c

2) Si sumamos o multiplicamos miembro a miembro dos igualdades se obtiene otra igualdad

Si a = b y c = d, entonces a + c = b + d

PROPIEDADES DE LA DESIGUALDAD

1) Si a ambos miembros de una desigualdad se suma una misma constante, la desigualdad se mantiene***:***

Si a < b, entonces a+c < b+c

2) Si a ambos miembros de una desigualdad se multiplica por una misma constante positiva la desigualdad se mantiene

Si a < b y c > 0, entonces a.c < b.c

3) Si a ambos miembros de una desigualdad se multiplica por una misma constante negativa la desigualdad cambia de sentido

Si a < b y c < 0, entonces a.c > b.c

SUBCONJUNTOS DE LOS NÚMEROS REALES: INTERVALOS

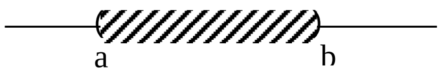
A menudo se trabaja con subconjuntos de números reales que representan semirrectas o segmentos de recta. Dichos subconjuntos reciben el nombre de Intervalos.

Un **intervalo** es un conjunto infinito de números reales comprendidos entre dos valores fijos que se denominan **extremos del intervalo**.

Tipos de Intervalos

- **Intervalo Abierto** (a, b) es el conjunto de los números reales mayores que a y menores que b con a < b, donde **a** y **b** son los extremos que **No** pertenecen al intervalo.

  Se escribe: $(a, b) = \{ x \in R \ / \ a < x < b\}$



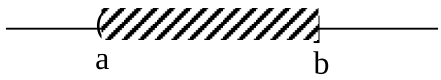
❖ **Intervalo Cerrado** [a, b] es el conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b con a < b, donde **a** y **b** son los extremos que **Sí** pertenecen al intervalo.

Se escribe: $[a, b] = \{ x \in R \ / \ a \leq x \leq b\}$

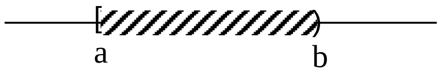
Se pueden realizar las combinaciones con los extremos llamándolos:

❖ **Intervalos semiabiertos** cuando son de la forma:

$(a, b] = \{ x \in R \ / \ a < x \leq b\}$



$[a, b) = \{ x \in R \ / \ a \leq x < b\}$



❖ **Intervalos Infinitos:** Se presentan las siguientes posibilidades

a) $(-\infty, b)$ conjunto de los números reales menores que b.

$(-\infty, b) = \{x \in R \ / \ x < b\}$

b) $(-\infty, b]$ conjunto de los números reales menores o iguales que b.

$(-\infty, b] = \{x \in R \ / \ x \leq b\}$

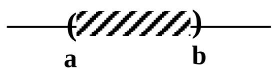
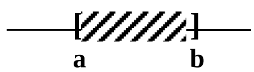
c) $(a, +\infty)$ conjunto de los números reales mayores que a.

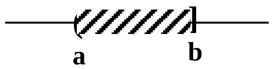
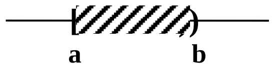
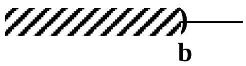
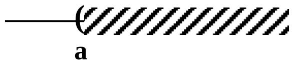
$(a, +\infty) = \{x \in R \ / \ x > a\}$

d) $[a, +\infty)$ conjunto de los números reales mayores o iguales que a.

$[a, +\infty) = \{x \in R \ / \ x \geq a\}$

En resumen se presenta la siguiente tabla:

Denominación	**Notación de Intervalos**	**Notación como subconjunto de los reales**	**Forma gráfica**
Intervalo abierto	(a, b)	$\{x \in R \ / \ a < x < b\}$	
Intervalo cerrado	[a, b]	$\{x \in R \ / \ a \leq x \leq b\}$	

Intervalos semiabiertos	(a, b]	$\{x \in R \,/\, a < x \leq b\}$	
	[a, b)	$\{x \in R \,/\, a \leq x < b\}$	
Intervalos infinitos	$(-\infty, b)$	$\{x \in R \,/\, x < b\}$	
	$(-\infty, b]$	$\{x \in R \,/\, x \leq b\}$	
	(a, ∞)	$\{x \in R \,/\, x > a\}$	
	$[a, \infty)$	$\{x \in R \,/\, x \geq a\}$	

Observaciones:

- **Los símbolos ∞ y $-\infty$ se leen "infinito positivo" e "infinito negativo" respectivamente.**
- **Los intervalos no se expresan por extensión**
- **Los intervalos no se representan gráficamente mediante diagramas de Venn.**
- **Los intervalos se representan gráficamente en la recta real.**

OPERACIONES CON INTERVALOS

Los intervalos son subconjuntos de números reales y las operaciones que se pueden realizar entre ellos son las operaciones propias entre conjuntos: unión, intersección, diferencia y complemento.

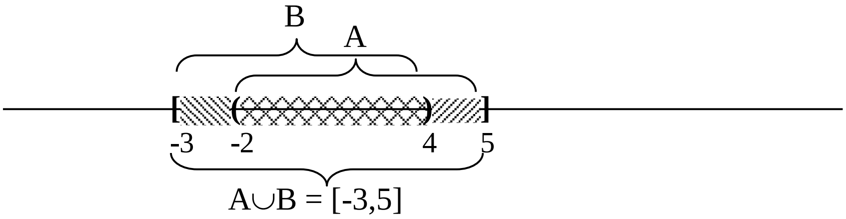
Se opera entre ellos gráficamente y posteriormente se expresa simbólicamente el conjunto obtenido.

❖ <u>UNIÓN DE INTERVALOS</u>: A∪B

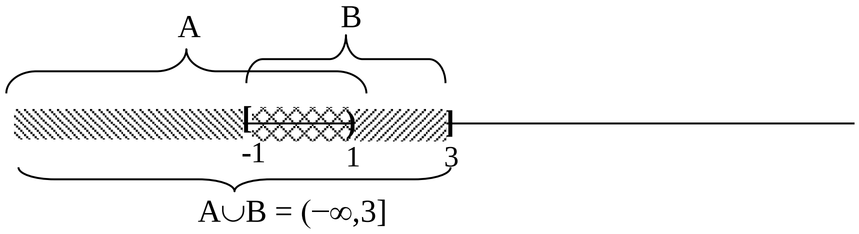
Se representan gráficamente ambos conjuntos en la recta numérica y la unión de intervalos es la sección de la recta numérica que se encuentra rayada.

Ejemplos:

a) A = (−2,5] y B = [-3,4)



b) A = (−∞,1) y B = [-1,3]

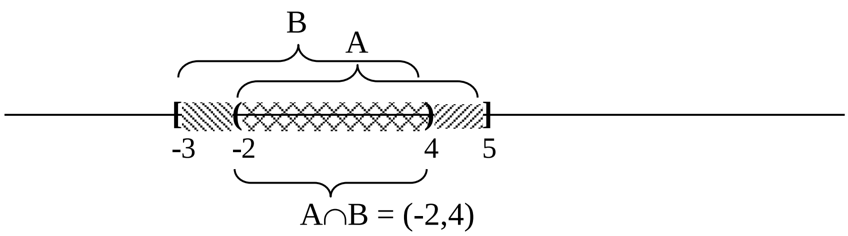


❖ <u>INTERSECCIÓN</u> <u>DE</u> <u>INTERVALOS</u>: A∩B

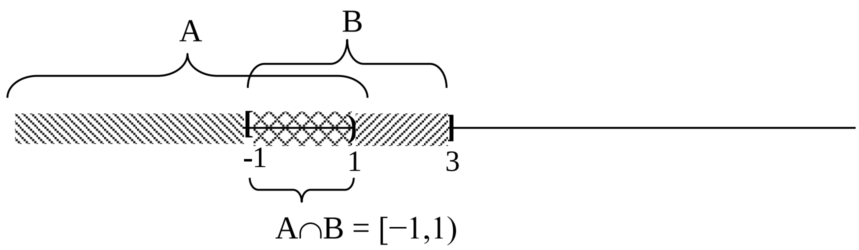
Se representan gráficamente ambos conjuntos en la recta numérica y la intersección de intervalos es la sección de la recta numérica común a ambos, que se encuentra doblemente rayada.

Ejemplos:

a) A = (−2,5] y B = [-3,4)



b) A = (−∞,1) y B = [-1,3]

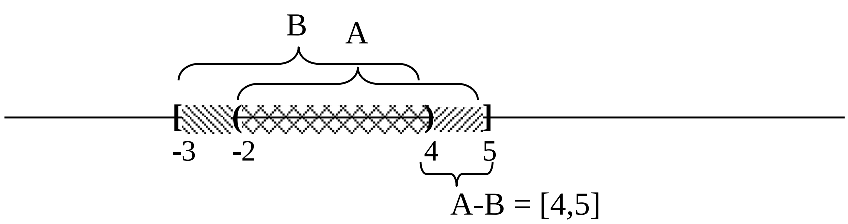


❖ <u>DIFERENCIA</u> <u>ENTRE</u> <u>INTERVALOS</u>: A− B

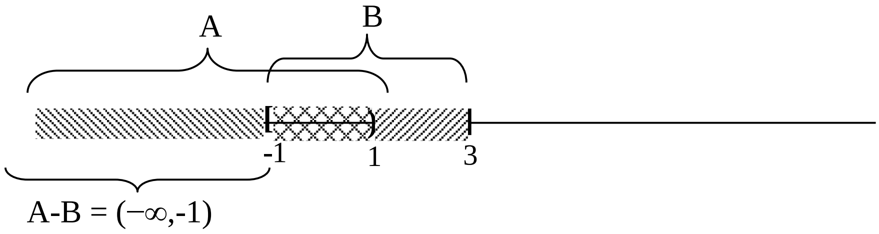
Se representa gráficamente el conjunto A en la recta numérica, luego se le quita lo rayado por el conjunto B.

Ejemplos:

a) A = (−2,5] y B = [-3,4)



b) A = (−∞,1) y B = [-1,3]

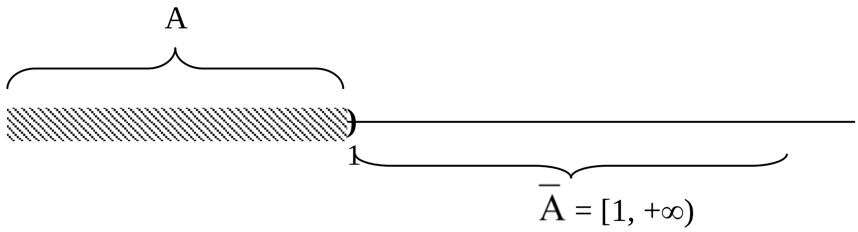


❖ <u>COMPLEMENTO DE UN INTERVALO</u>

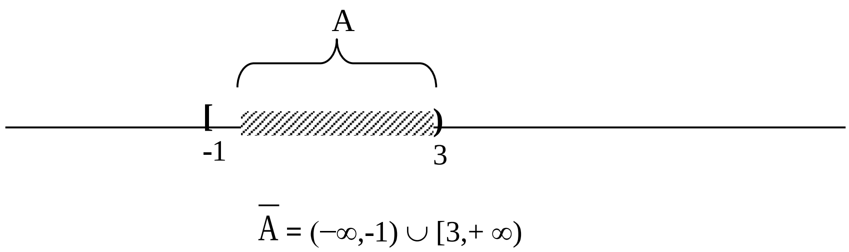
Se representa gráficamente el conjunto A en la recta numérica, luego el complemento de A es la sección de la recta numérica sin sombrear.

Ejemplos:

a) $A = (-\infty, 1)$



b) A $= [-1, 3)$



UNIDAD 2

ECUACIONES

INTRODUCCIÓN

Algunas igualdades entre expresiones algebraicas son ciertas, para todos los valores que demos a las letras, que intervienen en ellas.

Estas igualdades reciben el nombre de **identidades**.

Así por ejemplo: 3(x+5) = 3x +15 es una identidad, porque ambos miembros toman el mismo valor numérico para cualquier número que sustituya a "*x*".

Mientras, que hay otras igualdades, que se verifican para algún o algunos valores de las letras, y se denominan **ecuaciones**.

Por ejemplo: 2x-13 = 1, obtenemos en ambos lados del signo igual el mismo valor numérico, sólo cuando *x* es igual a 7. Se trata por lo tanto de una "ecuación".

Las soluciones de una ecuación son aquellos números que, cuando sustituyen a las letras de la ecuación, hacen que la igualdad sea verdadera.

ECUACIÓN LINEAL

A toda expresión algebraica de la forma $ax + b = 0$**, donde** a **y** b **son números reales** $(\boldsymbol{a \neq 0})$**, se la llama** ecuación de primer grado en una incógnita, ecuación de grado 1 **o simplemente** ecuación lineal**.**

Ejemplos:

a) $\mathbf{x - 3 = 0}$ **b)** $-\frac{7}{5} + 2x = 0$ **c)** $\mathbf{4x = 0}$

ECUACION CUADRÁTICA

Una **ecuación cuadrática** en la variable x es una ecuación que puede escribirse de la siguiente forma:

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, donde **a**, **b** y **c** son constantes (**a ≠ 0**).

Una ecuación cuadrática también puede llamarse ecuación de segundo grado o de grado dos.

¿Cómo resolvemos esta ecuación?

Teniendo en cuenta la siguiente formula: $\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$, donde x_1 y x_2 se les denomina raíces de dicha ecuación (también llamados ceros de la ecuación) y determinan la solución de las mismas.

La expresión $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de discriminante y se simboliza con la letra griega delta mayúscula Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

El discriminante sirve para clasificar las raíces de una ecuación cuadrática

Clasificación de las raíces en función del discriminante

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ entonces la ecuación tiene dos raíces reales distintas.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ entonces la ecuación tiene dos raíces reales iguales.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ entonces la ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas.

Ejemplo: Vamos a analizar las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - x - 6 = 0$

Su discriminante es: $\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-6) = 25 > 0$ es decir, esta ecuación tiene dos raíces reales distintas.

b) $3x^2 - 6x + 3 = 0$

Su discriminante es: $\Delta = (-6)^2 - 4.3.3 = 0$ es decir, esta ecuación tendrá dos raíces reales iguales.

c) $x^2 + 4 = 0$

Su discriminante es: $\Delta = 0^2 - 4.1.4 = -16$ es decir, esta ecuación tendrá dos raíces complejas conjugadas.

Ejercicio: Hallar las raíces de las ecuaciones anteriores para corroborar los resultados hallados.

Desigualdades e Inecuaciones

❖ Desigualdades

Una **desigualdad** es una expresión matemática que contiene cualquiera de los siguientes signos:

$\leq, \geq, <, >$

❖ Inecuaciones

Las i**necuaciones** son **desigualdades algebraicas** en la que sus dos miembros se relacionan por uno de estos signos:

$<$	**menor que**	$\mathbf{2x - 1 < 7}$
$\leq$	**menor o igual que**	$\mathbf{2x - 1 \leq 7}$
$>$	**mayor que**	$\mathbf{2x - 1 > 7}$
$\geq$	**mayor o igual que**	$\mathbf{2x - 1 \geq 7}$

La **solución** de una **inecuación** es el conjunto de valores de la variable que la verifica, y se puede expresar mediante:

1. **Una representación gráfica.**

2. **Un intervalo.**

- ❖ En general una inecuación tiene ***infinitas*** soluciones.
- ❖ El ***grado*** de las inecuaciones se define como el de las ecuaciones.

❖ **Resolver** una inecuación es hallar los valores que deben tomar sus variables para que se cumpla la desigualdad.

❖ **Ejemplos** de **Inecuaciones de primer grado**

(1) $2x - 1 < 7$ $2x < 8$ $x < 4$

Solución: $(-\infty, 4)$

(2) $2x - 1 > 7$ $2x > 8$ $x > 4$

Solución: $(4, \infty)$

(3) $2x - 1 \geq 7$ $2x \geq 8$ $x \geq 4$

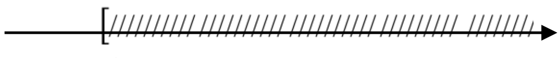
Solución: $[4, \infty)$

Otros ejemplos:

a) Resolver: $2(x + 1) + 3 \leq 5(x + 2) - 2$

- Resolver los paréntesis: $2x + 2 + 3 \leq 5x + 10 - 2$
- Agrupar los términos semejantes: $5 \leq 5x - 2x + 8 \Leftrightarrow 5 - 8 \leq 3x \Leftrightarrow -3/3 \leq x \Leftrightarrow -1 \leq x$
- La solución es el conjunto de puntos del intervalo $[-1, +\infty)$

Gráficamente:



b) Una empresa de alquiler de coches cobra \$ 50 fijos más \$ 2.50 por kilómetro recorrido. Otra competidora no tiene canon fijo, pero carga \$5 por kilómetro. ¿A partir de qué distancia nos resulta más económica la primera?

- Llamando x: kilómetros a recorrer, se tiene que calcular cuando el costo de la primera es menor que el de la segunda, es decir:
- Se tiene costo de la primera: $50 + 2.5x$
- Se tiene costo de la segunda: $5x$
- Luego, $50 + 2.5x < 5x$
- De donde $50 < 5x - 2.5x \Leftrightarrow x < 20$
- La primera opción nos interesa para recorridos mayores a los 10 km.

VALOR ABSOLUTO

Dado un número real **x**, se llama **valor absoluto de x,** y se simboliza | x | al número real positivo dado por:

| x | = x , si el número x es positivo o cero

| x | = –x , si el número x es negativo

Ejemplos:

a) | 8 | = 8

b) | -1,6 | = 1,6

c) | 0 | = 0

d) | 5 - 9 | = | -4 | = 4

Observación: El valor absoluto de un número x define la distancia del número x y el número 0, por ello el valor absoluto siempre es positivo.

PROPIEDADES

- | x | = a si y sólo si x = a ó x = -a
- | x | ≤ a si y sólo si –a ≤ x ≤ a
- | x | ≥ a si y sólo si x ≤ –a ó x ≥ a
- $\sqrt{x^2} = |\,x\,|$ **(IMPORTANTE)**
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

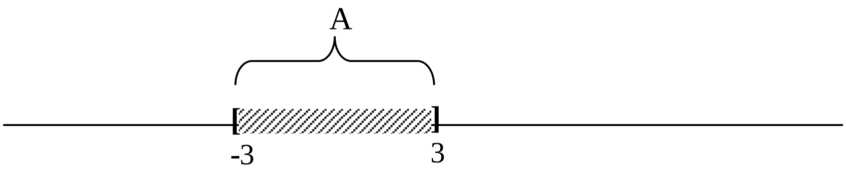
Ejemplos:

Determinar el conjunto que representa cada una de las siguientes expresiones:

a) $|\,x\,| \leq 3$

De acuerdo con la **propiedad correspondiente** del valor absoluto, se tiene:

$|\,x\,| \leq 3$ sii $-3 \leq x \leq 3$ es decir, son los valores de $x \in [-3,3]$



b) $|\,x\,| \geq \frac{1}{2}$

De acuerdo a la **propiedad correspondiente** del valor absoluto, se tiene:

$|\,x\,| \geq \frac{1}{2}$ sii $x \geq \frac{1}{2}$ ó $x \leq -\frac{1}{2}$ es decir, son los valores de $x \in (-\infty, -1/2\,] \cup [1/2, +\infty)$

c) $|\,x - 2\,| \leq 3$

De acuerdo a la **propiedad correspondiente** del valor absoluto, se tiene:

$|\,x - 2\,| \leq 3$ sii $-3 \leq x - 2 \leq 3$ sii $-3 + 2 \leq x \leq 3 + 2$ sii $-1 \leq x \leq 5$, es decir, son los valores de

$x \in [-1, 5]$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS

Téngase en cuenta, la siguiente situación:

"El doble del número x, más el número y, es igual a 7. La diferencia entre x e y es igual a 2"

La traducción al lenguaje simbólico de la situación planteada es: $\begin{cases} 2\mathbf{x}+\mathbf{y}=7 \\ \mathbf{x}-\mathbf{y}=2 \end{cases}$

Lo que se acaba de escribir, representa un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**, lo definiremos de la siguiente forma:**

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un par de ecuaciones lineales que se suelen representar de la siguiente forma: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

Donde:

- **x** e **y** son los números reales llamados **incógnitas**,
- a_1, b_1, a_2 y b_2 son los números reales llamados **coeficientes**
- c_1 y c_2 son los números reales llamados **términos independientes**.

Los sistemas de ecuaciones ayudan, por lo tanto, a plantear y resolver problemas parecidos al redactado en el párrafo anterior.

El par de números **(x, y)** que satisface ambas ecuaciones de un sistema se llama **solución** del sistema de ecuaciones.

Clasificación de sistemas lineales

1. Sistema ***compatible***: es el que tiene solución.

   Dependiendo del número de soluciones puede ser:

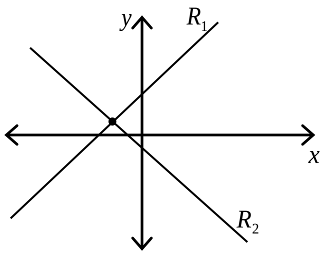
   - Sistema ***compatible determinado*** si tiene una única solución.
   - Sistema ***compatible indeterminado*** si tiene múltiples (infinitas) soluciones.

2. Sistema ***incompatible***: es el que no tiene solución.

Importante:

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, gráficamente representa el dibujo de dos rectas en el plano. Por lo tanto, puede ocurrir:

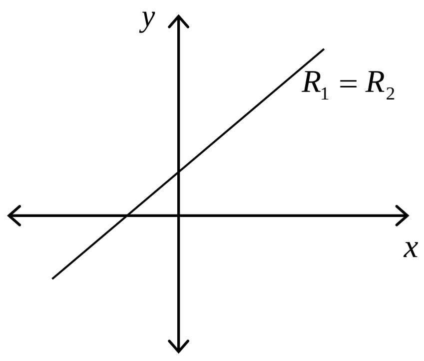
❖ Caso *a*: **Que las dos rectas se corten en un único punto.** *Sistema Compatible Determinado*



Esto indica que: El sistema dado tiene solución única**.**

Dicha solución son las coordenadas del punto de corte.

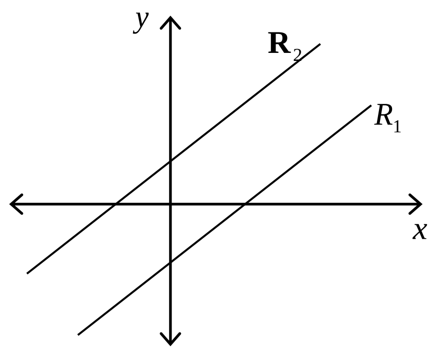
❖ Caso *b*: **Que las dos rectas estén superpuestas (o sea coincidentes).** *Sistema Compatible Indeterminado*



Esto indica que el conjunto solución estará formado por infinitos pares (x,y).

Luego el sistema dado tiene infinitas soluciones**.**

❖ Caso *c*: **Que las dos rectas sean paralelas (no coincidentes).** *Sistema Incompatible*



Luego se observa que no existen pares (*x*, *y*) que satisfagan a las dos rectas simultáneamente.

En consecuencia, el conjunto solución, será un conjunto vacío.

Esto indica que el sistema dado no tiene solución**.**

A continuación, se analiza el <u>método de sustitución, el método de igualación</u> (analíticos) y el <u>método gráfico</u> para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (hay otros métodos analíticos de los cuales puede hacer uso).

❖ **MÉTODO DE SUSTITUCIÓN**

Para aplicar este método debe tener en cuenta los siguientes pasos:

Paso 1: **De alguna de las ecuaciones del sistema despejar una de las incógnitas.**

Paso 2: **La variable despejada se reemplaza en la otra ecuación del sistema. De esta forma se obtiene una "ecuación lineal con una incógnita".**

Paso 3: **Resuelva esta última ecuación, obteniendo así, el valor numérico de una de las incógnitas.**

Paso 4: **Retomando la expresión del Paso 1, reemplazar en ella el valor numérico de la incógnita, obtenido en el Paso 3. Resuélvala.**

Paso 5: **Obtuvo así la solución del sistema; (si es que el sistema planteado tenía solución única, en caso contrario, tendrá algunos inconvenientes en la aplicación del método).**

Se aplica esta técnica al sistema planteado anteriormente.

$$\begin{cases} 2\mathbf{x}+\mathbf{y}=7 & (1) \\ \mathrm{x}-\mathrm{y}=2 & (2) \end{cases}$$

Paso 1: **De la ecuación (1) despejamos: y = - 2x + 7**

Paso 2: **La expresión de "y" se reemplaza en (2)**

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}-(-2\mathbf{x}+7)=2 \\ &\mathbf{x}+2\mathbf{x}-7=2 \\ &3\mathbf{x}=2+7 \end{aligned}$$

Paso 3: **Se resuelve esta última ecuación lineal de una incógnita:**

$$\begin{aligned} &3\mathbf{x}=9 \\ &\mathbf{x}=\frac{9}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{x}=3} \end{aligned}$$

Paso 4: **Retomando la expresión del Paso 1, y = - 2x + 7; reemplazamos en ella el valor de x = 3 (obtenido en el Paso 3).**

$$y=-2\bullet 3+7 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=1}$$

Paso 5: **Se obtuvo la única solución para este sistema: (*x*, *y*) = (3,1).**

Verificamos: $\begin{cases} 2\mathbf{x}+\mathbf{y}=7 \\ \mathbf{x}-\mathbf{y}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\bullet 3+1=7 \Rightarrow 7=7 \\ 3-1=2 \Rightarrow 2=2 \end{cases}$

❖ MÉTODO DE IGUALACIÒN

Para aplicar este método debe tener en cuenta los siguientes pasos:

Paso 1: **Despejar la misma incógnita de cada ecuación.**

Paso 2: **Igualar las expresiones obtenidas y de esta forma se obtiene una “ecuación lineal con una incógnita”.**

Paso 3: **Resolver esta última ecuación, obteniendo así, el valor numérico de una de las incógnitas.**

Paso 4: **Retomando la expresión del Paso 1, reemplazar en ella el valor numérico de la incógnita, obtenido en el Paso 3. Resuélvala.**

Paso 5: **Obtuvo así la solución del sistema; (si es que el sistema planteado tenía solución única, en caso contrario, tendrá algunos inconvenientes en la aplicación del método).**

Se aplica esta técnica al sistema planteado anteriormente.

$$\begin{cases} 2\mathbf{x} + \mathbf{y} = 7 & (1) \\ \mathrm{x} - \mathrm{y} = 2 & (2) \end{cases}$$

Paso 1: **De la ecuación (1) y (2) despejamos la variable y:** **y = - 2x + 7** **e** **y = x - 2**

Paso 2: **Igualamos las expresiones obtenidas y de esta forma se obtiene una “ecuación lineal con una incógnita”.**

$$\mathbf{-2x + 7 = x - 2}$$

$$\mathbf{7 + 2 = x + 2x}$$

Paso 3: **Se resuelve esta última ecuación lineal de una incógnita:**

$$3\mathbf{x} = 9$$

$$\mathbf{x} = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow \boxed{\mathrm{x} = 3}$$

Paso 4: **Retomando una de las expresiones del Paso 1, y = - 2x + 7; reemplazamos en ella el valor de x = 3 (obtenido en el Paso 3).**

$$y = -2 \bullet 3 + 7 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 1}$$

Paso 5: **Se obtuvo la única solución para este sistema: (x, y) = (3,1).**

Verificamos: $\begin{cases} 2\mathbf{x} + \mathbf{y} = 7 \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \bullet 3 + 1 = 7 \Rightarrow 7 = 7 \\ 3 - 1 = 2 \Rightarrow 2 = 2 \end{cases}$

❖ MÉTODO GRÁFICO

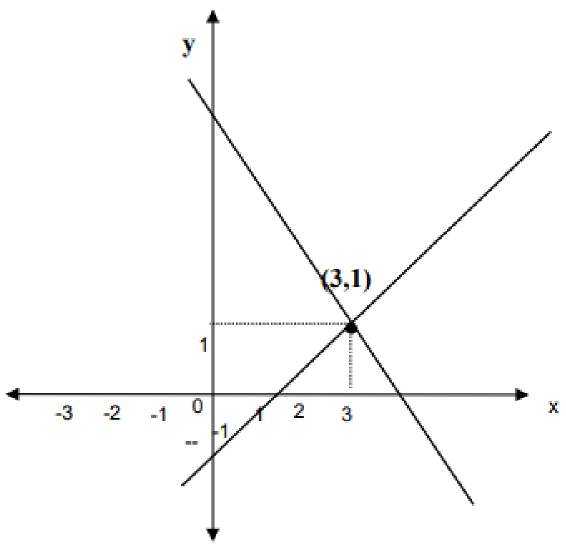
Básicamente consiste en: graficar cada una de las rectas que representan al conjunto solución de las ecuaciones del sistema, y analizar sus posiciones.

Importante:

Es conveniente, resolver previamente en forma gráfica el sistema dado, para analizar qué tipo de solución nos espera, y luego aplicar un método analítico para justificar y confirmar lo hallado gráficamente. Ejemplo: Resolver en forma gráfica el sistema planteado anteriormente.

Esto es: $\begin{cases} 2\mathbf{x}+\mathbf{y}=7 \\ \mathbf{x}-\mathbf{y}=2 \end{cases}$ o en forma equivalente $\begin{cases} \mathbf{y}=-2\mathbf{x}+7 \\ \mathbf{y}=\mathbf{x}-2 \end{cases}$

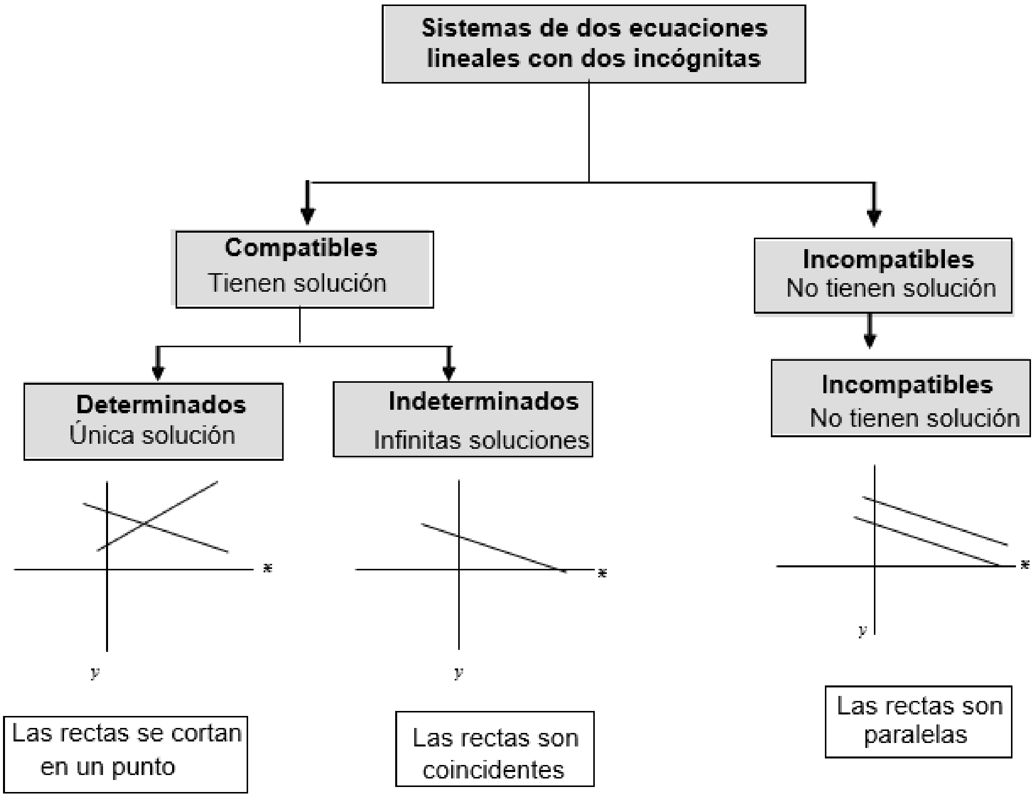
Se representan gráficamente en un mismo sistema ambas rectas:



Se observa que las dos rectas se cortan un único punto de coordenadas (3,1). Por lo tanto, el sistema tiene solución única dada por el punto (x, y) = (3,1).

Observaciones:

1. Cualquiera sea el método que aplique para resolver un sistema de ecuaciones lineales, el conjunto solución es el mismo en todos los casos.
2. Antes de aplicar cualquier procedimiento algebraico es conveniente realizar primero la representación gráfica de las ecuaciones del sistema para determinar si el sistema tiene o no solución y si tiene solución establecer si es única o no.
3. En el siguiente cuadro se presenta una clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales.


Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas
Compatibles
Tienen solución
Incompatibles
No tienen solución
Determinados
Única solución
Indeterminados
Infinitas soluciones
Incompatibles
No tienen solución
x
y
x
y
x
y
Las rectas se cortan en un punto
Las rectas son coincidentes
Las rectas son paralelas

UNIDAD 3

Expresiones algebraicas

Introducción

Desde sus remotos orígenes arraigados en Egipto, Arabia y la India veinte siglos antes de nuestra era, el álgebra ha sido considerada un método de expresión mediante fórmulas que permiten simplificar los cálculos numéricos. En ese entonces los problemas algebraicos aparecen formulados y resueltos de una manera verbal. Los polinomios, se han aplicado recientemente en la transmisión de la información. Durante los últimos años, el tráfico de datos por medio de las "carreteras" de la información ha crecido enormemente. Se pretende aumentar las velocidades de transmisión y conservar al mismo tiempo la integridad de los datos. Un método desarrollado para tal fin es el pet (transmisión codificada con prioridades). Con él la información se distribuye em diferentes paquetes. Esta distribución se determina con base en polinomios.

Llamamos ***Expresión Algebraica Real*** a toda combinación de letras y/o números reales vinculados entre sí por las operaciones de suma, resta, multiplicación y potenciación de exponente racional.

Ejemplos:

Son expresiones algebraicas

a) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, es una expresión algebraica en las variables r y h.

b) $10 - 3\sqrt[5]{y} + \frac{5}{7 + y^2}$ es una expresión algebraica en la variable y.

c) $(a + b)^3 - 3a - 12 a.b^2$ es una expresión algebraica en las variables a y b.

Algunas expresiones algebraicas en particular, con las que se trabajará en esta sección, reciben el nombre de **polinomios y** se caracterizan en que sus variables están afectadas por las operaciones de suma, resta, producto y potencia de exponente entero no negativo.

Polinomios

Un **polinomio de grado n**, en la indeterminada x es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 , \quad a_{n \neq 0}$$

En el cual:

- $a_n, a_{n-1}, \dots a_2, a_1, a_0$, son números reales denominados: **coeficientes**.
- x es una variable denominada: **variable real**.
- n es un número natural que indica el **grado del polinomio**.

Para tener en cuenta:

- Si el polinomio es de grado cero, se llama polinomio **constante**.
- El coeficiente de la mayor potencia de x se llama **coeficiente principal**.
- Si el coeficiente principal es 1, el polinomio se dice **mónico**.
- El coeficiente a_0 se llama **término independiente**.
- El polinomio de un solo término (no nulo) se llama **monomio**, el de dos (no nulos), **binomio**, etc.
- Dos monomios son semejantes si tienen la misma parte literal.
- Si al polinomio no le faltan términos se lo llama **polinomio completo.**
- El polinomio puede estar **ordenado** (en forma creciente o decreciente), o **desordenado**.
- Si todos los coeficientes son nulos, incluso a_0, el polinomio no tiene grado y se llama **polinomio nulo**.
- Dos polinomios son **iguales** si sus monomios semejantes son iguales

Valor numérico de un polinomio

Dado un polinomio P(x), al sustituir la variable x por un número a se obtiene un número que se denota P(a) y que es el **valor numérico** de P(x) para x = a.

Ejemplo: Encontrar el valor numérico del polinomio $P(x) = x^2 + 3x - 4$ para x= 2

$P(2) = 2^2 + 3.2 - 4 = 6$

Se dice que a es raíz del polinomio P(x) si y sólo si P(a) = 0.

Operaciones con polinomios

Para operar con polinomios resulta conveniente completarlos y ordenarlos en forma decreciente, aunque para la suma (resta) y producto no es imprescindible.

Suma (resta) de Polinomios

La suma (resta) de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando (restando) los monomios semejantes.

Ejemplos:

Sean $P(x) = 2x^4 - x^3 + x$ y $Q(x) = x^3 - 5x^4 - x^2 + 7$, determinar:

a) P(x) + Q(x) **b)** P(x) – Q(x)

a) Completando y ordenando los polinomios y ubicándolos de manera que resulten encolumnados los monomios semejantes, resulta:

$$\begin{array}{ll} P(x) & 2x^4 - x^3 + 0x^2 + x + 0 \\ + & \\ Q(x) & -5x^4 + x^3 - x^2 + 0x + 7 \\ \hline P(x) + Q(x) & -3x^4 + 0x^3 - x^2 + x + 7 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} P(x) & 2x^4 - x^3 + 0x^2 + x + 0 \\ - & \\ Q(x) & -5x^4 + x^3 - x^2 + 0x + 7 \\ \hline P(x) - Q(x) & 7x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 7 \end{array}$$

Multiplicación de Polinomios

Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y luego se suman los monomios semejantes.

Ejemplo:

Dados los polinomios $R(x) = 2x^4 - x^3 + x$ y $S(x) = -5x^4 + x^3 - x^2 + 7$, obtener $R(x) \cdot S(x)$

En efecto:

$R(x) \cdot S(x) = (2x^4 - x^3 + x) \cdot (-5x^4 + x^3 - x^2 + 7) =$

$= -10x^8 + 5x^7 - 5x^5 + 2x^7 - x^6 + x^4 - 2x^6 + x^5 - x^3 + 14x^4 - 7x^3 + 7x =$

$= -10x^8 + 7x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 15x^4 - 8x^3 + 7x$

Productos Especiales:

Cuadrado de un binomio

"El cuadrado de un binomio es siempre un trinomio, llamado trinomio cuadrado perfecto, formado por el cuadrado del primer término más el duplo del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término".

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2.a.b + b^2}$$

Ejemplo:

Sea A (x) = 5 + x , determinar A (x) . A (x) es lo mismo que $[A(x)]^2$

$$A(x).A(x) = (5 + x)(5 + x) = 25 + 5x + 5x + x^2 = \underbrace{25}_{5^2} + \underbrace{10x}_{2.5.x} + \underbrace{x^2}_{x^2} = [A(x)]^2$$

Aplicando la propiedad, resulta:

$$[A(x)]^2 = 5^2 + 2.5.x + x^2 \quad = 25 + 10\,x + x^2$$

Cubo de un binomio

"El cubo de un binomio es siempre un cuatrinomio, llamado cuatrinomio cubo perfecto, formado por el cubo del primer término más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término."

$$\boxed{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3.a^2.b + 3.a.b^2 \pm b^3}$$

Ejemplo:

Sea B (x) = 2 + x, determinar $B(x).B(x).B(x) = [B(x)]^3$

$B(x).B(x).B(x) = (2 + x).\,(2 + x)\,(2 + x) = (4 + 4x + x^2).(2 + x) =$

$$= 8 + 8x + 2x^2 + 4x + 4x^2 + x^3 = = \underset{2^3}{\underset{\downarrow}{8}} + \underset{3.2^2x}{\underset{\downarrow}{12x}} + \underset{3.2x^2}{\underset{\downarrow}{6\,x^2}} + \underset{x^3}{\underset{\downarrow}{x^3}} = [B(x)]^3$$

Aplicando la propiedad, resulta: $[B(x)]^3 = 2^3 + 3.2x^2 + 3\,.2^2x + x^3 = 8 + 12x + 6\,x^2 + x^3$

Caso particular (Diferencia de cuadrados)

"El producto de la suma por la diferencia de dos términos es igual a la diferencia de los cuadrados de ambos", es decir

$$\boxed{(a + b).\,(a - b) = a^2 - b^2}$$

Ejemplo:

Sea R(x) = x – 2 y P(x) = x + 2, entonces R(x) . P(x) = (x – 2) (x + 2)

Aplicando la propiedad: R(x). P(x) = (x – 2) (x + 2) = $x^2 - 4$

O por producto de binomios, tenemos: R(x). P(x) = (x – 2) (x + 2) = $x^2 + 2\,x - 2\,x - 4 = x^2 - 4$

División de un polinomio por un polinomio cualquiera

Dividir un polinomio D(x) (dividendo) por otro polinomio Q(x) (divisor) de grado menor o igual que D(x), es obtener dos polinomios: C(x) (cociente) y R(x) (resto), únicos, tal que:

$$D(x) = Q(x)\,.\,C(x) + R(x)$$

$$\frac{D(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Estas igualdades provienen de efectuar la división:

$$\begin{array}{l|l} D(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

Tener en cuenta que: La división se realiza empleando el mismo algoritmo que se utiliza para dividir números reales. Es imprescindible antes de efectuar la división completar y ordenar en forma decreciente el polinomio D(x). Mientras que el polinomio Q(x) sólo debe estar ordenado en forma decreciente

Ejemplo:

Sean $D(x) = 4x^4 - 1 + 3x - 5x^2$ y $Q(x) = -x + 2x^2 + 1$, calcular $D(x) : Q(x)$

Se ordenan ambos polinomios y se completa D(x).

$$\begin{array}{rl|l}
 & 4x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 3x - 1 & 2x^2 - x + 1 \\ \cline{3-3}
- & & 2x^2 + x - 3 \\
 & 4x^4 - 2x^3 + 2x^2 & \\ \cline{2-2}
 & 0x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 3x & \\
- & + 2x^3 - x^2 + x & \\ \cline{2-2}
 & 0x^3 - 6x^2 + 2x - 1 & \\
- & \underline{-6x^2 + 3x - 3} & \\
 & 0x^2 - 1x + 2 &
\end{array}$$

Luego: $C(x) = 2x^2 + x - 3$ y $R(x) = -x + 2$

Caso particular de división de polinomios cuando el divisor sea un binomio de la forma: **$Q(x) = (x - a)$ o $Q(x) = (x + a)$**

En este caso es posible aplicar el método conocido como: **"Regla de Ruffini".**

Ejemplo de aplicación de la Regla de Ruffini.

Sean $D(x) = 2x^4 + 1 - 5x - x^2$ y $Q(x) = x - 2$, calcular $D(x) \div Q(x)$.

1) En primer lugar, hay que completar y ordenar en forma decreciente el polinomio
   $D(x) = 2x^4 + 0x^3 - x^2 - 5x + 1$

2) Proceder como se indica en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{r|rrrrrl} & 2 & 0 & -1 & -5 & +1 & \longrightarrow \text{Coef. de } D(x) \\ a=2 & & 4 & 8 & 14 & 18 & \\ \hline & \underbrace{2 \quad 4 \quad 7 \quad 9}_{\text{Coef. de } C(x)} & & & & \boxed{19} & \longrightarrow \text{Resto } R(x) \end{array}$$

El grado del polinomio cociente es un grado menor que el grado de D(x), por lo tanto:

Cociente: $C(x) = 2\,x^3 + 4\,x^2 + 7\,x + 9$ y Resto: $R(x) = 19$

- ❖ Al dividir D(x) en Q(x) por el algoritmo de la división, D(x) resulta:

  $D(x) = C(x).\ Q(x) + R(x)$

- ❖ Si el resto R(x) = 0, entonces D(x) = C(x). Q(x); esto indica que D(x) es divisible por Q(x).

TEOREMA DEL RESTO

El valor numérico que toma el polinomio D(x) en x = a, es decir D(a), coincide con el resto de dividir D(x) por (x-a)

$$\begin{array}{r|l} D(x) & x - a \\ \cline{2-2} \mathbf{R = D(a)} & \quad C(x) \end{array}$$

El teorema anterior es de gran utilidad pues nos permite asegurar que:

Si x = a es raíz de D(x) entonces D(x) es divisible por x – a

Factorización de polinomios

¿Qué es factorear un polinomio?

Factorizar o factorear un polinomio significa escribirlo como producto de factores (cada factor es un polinomio irreducible).

¿Cómo se hace?

Para factorizar un polinomio es necesario recordar algunos casos sencillos de factorización de polinomios:

Factor Común

Sacar o extraer factor común significa identificar en todos los términos del polinomio dado aquellos factores que se repiten, agruparlos y expresar el polinomio original como producto de un monomio, constituido por los factores comunes, por un polinomio con términos en los que faltan los factores presentes en el monomio.

Ejemplos:

a) Dado $P(x) = 27\,x^3 + 3\,x^2 - 6\,x^4$

Es fácil ver que todos los números son divisibles por 3 y que las letras son divisibles por x^2, por lo tanto $3\,x^2$ es el factor común a todos los términos, luego extraemos $3x^2$ y queda el polinomio factoreado de la siguiente forma: $P(x) = 3\,x^2\,(9\,x + 1 - 2\,x^2)$

b) Dado $R(x) = 8\,b^5 x^2 y^3 - 6\,b^2 c^3 y\,z - 2\,b^4 c^4 x\,y^2 z^2$, factorizado queda

$R(x) = 2\,b^2 y\,(4\,b^3 x^2 y^2 - 3\,c^3 z - b^2 c^4 x\,y\,z^2)$

Trinomio Cuadrado Perfecto

Al estudiar el cuadrado de un binomio se obtuvo como resultado un trinomio, llamado trinomio cuadrado perfecto:

$$P(x) = (x \pm a)^2 = x^2 \pm 2\,x\,a + a^2$$

Para saber si un trinomio es un cuadrado perfecto, se debe analizar:

1. Si dos de los términos son cuadrados perfectos, y en ese caso hay que buscar sus bases.
2. Si el término restante es el doble producto de las bases.

Ejemplo:

$$P(x) = x^2 - 10\,x + 25$$

$(x)^2$ $(5)^2$

$2.x.5 = 10x$

Por lo tanto: $x^2 - 10\,x + 25 = (x - 5)^2$

Diferencia de Cuadrados

Si el polinomio dado es un binomio con ambos términos cuadrados perfectos, y uno de ellos es negativo, entonces se podrá factorizar como el producto de la suma por la diferencia de las bases de esos cuadrados.

$$P(x) = x^2 - a^2 = (x + a)\,.\,(x - a)$$

Ejemplos:

a) Sea $P(x) = 9 - x^2$

Las bases son: $9 = (3)^2$

$x^2 = (x)^2$

Luego el polinomio quedará factoreado: $P(x) = 9 - x^2 = (3 + x).(3 - x)$

b) Sea $R(s) = (-9\,s^2 + 4\,t^2) = (4\,t^2 - 9\,s^2) = (2\,t - 3\,s)\,.\,(2\,t + 3\,s)$

pues $4t^2 = (2t)^2$ y $9s^2 = (3s)^2$

Teorema Fundamental del Álgebra. Factorización por medio de raíces

Todo polinomio de grado **n** tiene **a lo sumo n** raíces.

Por lo tanto es posible factorizar el polinomio P(x) de grado n, de la siguiente manera:

Si $P(x)= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tiene n raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$ entonces

$P(x) = a_n(x - x_1).(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}).(x - x_n)$, con a_n coeficiente principal.

Ejemplo:

Sea el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ sus raíces son: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$

Según el Teorema Fundamental del Álgebra quedará factorizado:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 1.(x - 1).(x - 3).(x - (-2)) = (x - 1).(x - 3).(x + 2)$$

El Teorema anterior es de gran utilidad, siempre que se conozcan las raíces del polinomio.

La pregunta es entonces,

¿Cómo determinar las raíces en distintos polinomios?

A continuación se presentan las formas de factorizar un polinomio aplicando el Teorema Fundamental del Algebra de acuerdo al número de raíces que posee dicho polinomio, en concordancia con su grado.

- Para un polinomio de primer grado (lineal) $P(x)= ax + b$

Raíces de polinomios de primer grado

Si el polinomio es de la forma: $P(x) = a x + b$, con $a \neq 0$, para determinar la raíz igualamos el polinomio a cero, o sea $P(x) = 0$, y "despejamos" x.
Luego el polinomio factorizado queda:

$$P(x) = a (x - x_1)$$

Ejemplo:

Factorizar $P(x) = 2x - 5$ utilizando el Teorema anterior.
Para encontrar su raíz igualamos a cero y "despejamos" x, es decir: $2x - 5 = 0$.
Sumando 5 a ambos miembros, tenemos: $2x = 5$.

Dividiendo miembro a miembro por 2, resulta $x = \frac{5}{2}$

Luego $x = \frac{5}{2}$ es raíz de $P(x) = 2x - 5$.

El polinomio P(x) factorizado queda: $P(x) = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)$.

❖ Para un polinomio de segundo grado $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

Raíces de polinomios de segundo grado

Si el polinomio es de la forma: $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, con $a \neq 0$, para determinar las dos raíces igualamos el polinomio a cero, o sea $P(x) = 0$

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Para encontrar los valores de x que verifican esta igualdad se usa la conocida fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estos valores x_1, x_2 pueden ser números reales y distintos, números reales e iguales y números imaginarios.

Luego el polinomio factorizado queda: $\boxed{P(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)}$

Ejemplo: Dado el polinomio $P(x) = x^2 - 5\,x + 6$, determinar las raíces y factorizarlo.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

El polinomio P(x) factorizado queda: $P(x) = 1(\,x - 3\,)(\,x - 2\,) = (\,x - 3\,).(\,x - 2)$

Raíces de polinomios de grado mayor o igual a dos

Para encontrar las raíces de un polinomio de tercer grado, (o mayor) de coeficientes enteros, se deberá aplicar el siguiente procedimiento:

Dado $P\,(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0$ con $a_0 \neq 0$

❖ Buscar los divisores de los términos a_0 (independiente) y a_n (principal)

❖ Generar el conjunto de "posibles raíces" con todas las fracciones $\dfrac{\text{Divisores de } a_0}{\text{Divisores de } a_n}$

❖ Probar, utilizando el Teorema del Resto, cada una de estas fracciones hasta obtener una raíz de P(x).

❖ Aplicando Ruffini se divide P(x) en (x – a) (siendo a la primera raíz encontrada) y se obtiene un polinomio de un grado menor que el dado.

❖ Si éste es dos, se aplica el procedimiento de polinomios de grado dos; si es mayor se busca otra raíz y se repite desde el paso anterior.

1. Los pasos anteriores sólo sirven para hallar las raíces racionales del polinomio, las irracionales y las complejas conjugadas se determinan con otros algoritmos.

2. Si $a_0 = 0$, factorizar primero extrayendo factor común y si el polinomio resultante verifica el enunciado, aplicar el procedimiento enunciado.

Ejemplo: Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, encontrar sus raíces y factorizarlo

$$a_0 = 6 \qquad a_1 = 1$$

Las posibles raíces son: $\dfrac{\text{Divisores de } a_0}{\text{Divisores de } a_n}$: $\{\ 6, -6, 3, -3, 2, -2, 1, -1\ \}$

$P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 6 = 8 \neq 0 \qquad \Rightarrow -1$ no es raíz de $P(x)$

$P(1) = 1^3 - 2.1^2 - 5.1 + 6 = 0 \qquad \Rightarrow 1$ es raíz de $P(x)$

❖ Dividir $P(x)$ por $(x - 1)$ usando Regla de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ 1 & & & & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$C(x) = x^2 - x - 6 \qquad R(x) = 0$

Por lo tanto: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Puede expresarse: $P(x) = (x^2 - x - 6).(x - 1)$

❖ Determinar las raíces de $C(x) = x^2 - x - 6 = 0$

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Por lo tanto las raíces del polinomio $P(x)$ son: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$

El polinomio $P(x)$ factorizado es:

$$P(x) = 1.(x - 1).(x - 3).(x + 2)$$

UNIDAD 4

Trigonometría

INTRODUCCIÓN

La palabra TRIGONOMETRIA proviene del griego Trigonom: triangulo y Metrom: medida. Entonces significa "MEDIDA DE TRIANGULOS".

Desde sus orígenes, la TRIGONOMETRIA estudia: las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos. Las dos líneas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se ocupa de triángulos que forman parte de la superficie de una esfera.

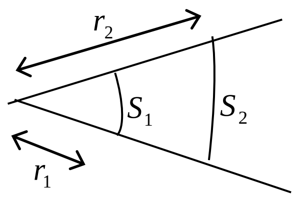
SISTEMA DE MEDICIÓN ANGULAR

Para expresar la medida de un ángulo, se pueden utilizar los siguientes sistemas:

- Sistema sexagesimal: su unidad de medida es el "grado sexagesimal"; donde un grado sexagesimal (simbólicamente 1º) representa la noventa-ava parte de un ángulo recto.

$$1^{o} = \frac{\text{ángulo recto}}{90} \Rightarrow 90^{o} = \text{ángulo recto}$$

- Sistema Radial: Para definir la unidad de medida de este sistema, analicemos previamente: Sea un ángulo cualquiera, con centro en el vértice del ángulo y radios r_1 y r_2, si se trazan arcos de circunferencias de longitudes S_1, S_2; se obtiene la siguiente figura:



Se verifica que:

$$\frac{S_1}{r_1} = \frac{S_2}{r_2} = a \ ; \quad \text{con } a = \text{cte}$$

Para cualquier radio *r*, y la correspondiente longitud de arco *S*, se verifica:

$$\frac{S}{r} = a \Rightarrow S = a \bullet r$$

La constante "a" es característica del ángulo en cuestión y determina el valor del ángulo. Se dirá que el ángulo se mide en "radianes".

Un **radián** es la medida del ángulo cuyo arco es igual al radio de la circunferencia, en la que está centrado.

Nota: Sabiendo que el ángulo central positivo de un giro es $\alpha = 360^o$ y recordando que la longitud de la circunferencia es 2. π .r, un ángulo central verifica:

$\alpha = 360^o = \dfrac{S}{r} = \dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$ Por lo tanto: **360º = 2 π radianes**

<u>Ejemplos</u>:

a) Determinar los radianes que representan 35º.

$$360^o \text{———} 2\pi \text{ rad}$$
$$35^o \text{ ——— } x \text{ rad} \Rightarrow x = \frac{35^o \cdot 2\pi \text{ rad}}{360^o} = \frac{7}{36}\pi \text{ rad}$$

b) Determinar los grados sexagesimales que representan 3π rad.

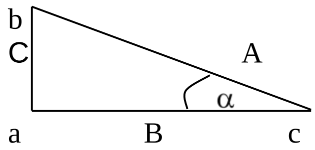
$$2\pi \text{ rad} \quad 360^o$$
$$3\pi \text{ rad} \quad x \Rightarrow x = \frac{3\pi \text{ rad} \cdot 360^o}{2\pi \text{ rad}}; \text{ luego } \quad x = 540^o$$

TABLA DE CONVERSIÓN ENTRE LOS SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

Ángulo en Grados	**Ángulo en Radianes**
0	0
30	$\frac{\pi}{6}$
45	$\frac{\pi}{4}$
60	$\frac{\pi}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$
180	π
270	$\frac{3}{2}\pi$
360	2π

Razones trigonométricas

Se llaman razones trigonométricas a las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Son seis y reciben el nombre de seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Considerando el ángulo α se pueden definir las seis razones de la siguiente forma:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cat op}}{\text{hip}} = \frac{C}{A} \qquad \sec\ \alpha = \frac{\text{hip}}{\text{cat ady}} = \frac{A}{B}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cat ady}}{\text{hip}} = \frac{B}{A} \qquad \operatorname{cosec}\ \alpha = \frac{\text{hip}}{\text{cat op}} = \frac{A}{C}$$

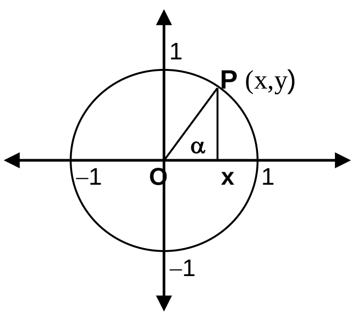
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cat op}}{\text{cat ady}} = \frac{C}{B} \qquad \operatorname{cotg}\ \alpha = \frac{\text{cat ady}}{\text{cat op}} = \frac{B}{C}$$

De las definiciones anteriores se deduce que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\ ;\ \operatorname{cotg}\ \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\ ;\ \sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha}\ ;\ \operatorname{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\ \alpha}$$

Circunferencia Trigonométrica

Recibe el nombre de **circunferencia trigonométrica** la circunferencia de centro en el origen de coordenadas cartesianas (0,0) y de radio r = 1.



Al considerar un punto P(x,y) perteneciente a la circunferencia trigonométrica y unir el punto P con el origen de coordenadas se obtiene el segmento $\overline{OP} = r = 1$ (radio de la circunferencia), que coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo OPX.

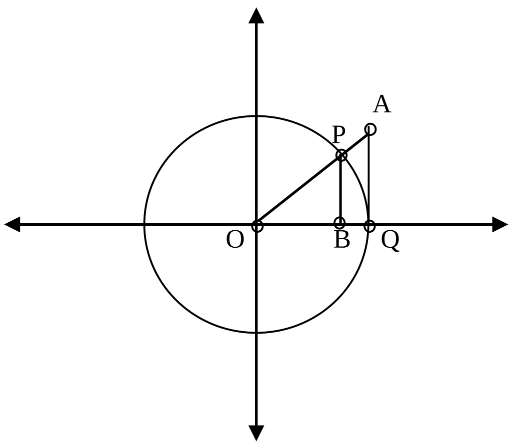
Observando el gráfico es claro que:

$\overline{OP}$ = r = **hipotenusa**

$\overline{OX}$ = x (abscisa del punto P) = **cateto adyacente** del ángulo α (en el triángulo OPX)

$\overline{PX}$ = y (ordenada del punto P) = **cateto opuesto** del ángulo α (en el triángulo OPX)

Las razones trigonométricas tienen una **representación segmentaria** en la circunferencia trigonométrica, que para ángulos del primer cuadrante es:

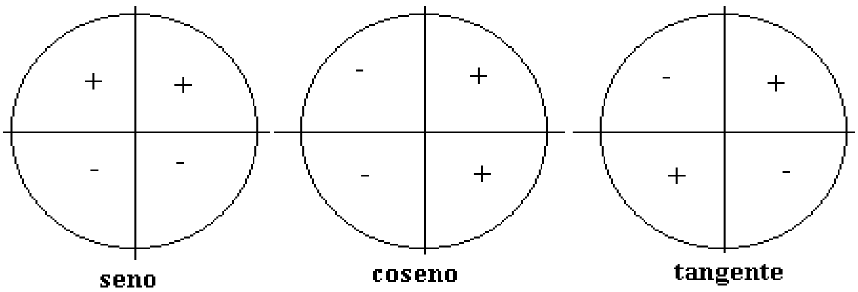


$\overline{OB}$ **= x**: representa el **cos** α

$\overline{PB}$ **= y**: representa el **sen** α

$\overline{QA}$: representa la **tg** α

Nota: Las razones presentan los siguientes signos de acuerdo a cada cuadrante, dependiendo del signo de las abscisas y ordenadas:



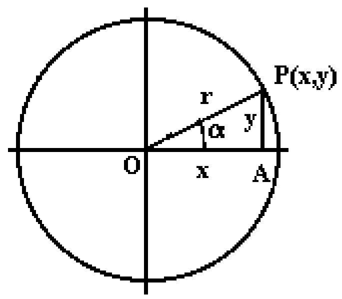
ACTIVIDAD

Completar el siguiente cuadro con el signo correspondiente.

α	sen α	cos α	tg α	cotg α	cosec α	sec α
1º Cuadrante						
2º Cuadrante						
3º Cuadrante						
4º Cuadrante						

Relaciones entre las razones trigonométricas

❖ **Teorema fundamental.**



$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{r}$ de donde $y = r\,\text{sen}\,\alpha$

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$ de donde $x = r\cos\alpha$

Además, según Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

luego tenemos que:

$$r^2\cos^2\alpha + r^2\text{sen}^2\alpha = r^2$$

de donde resulta la expresión:

$$\boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

♦ ***Dividiendo en la expresión del recuadro por*** $\text{sen}^2\alpha$**:**

$$1 + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \quad \rightarrow \quad \boxed{1 + \text{cotg}^2\,\alpha = \text{cosec}^2\,\alpha}$$

♦ ***Dividiendo en la expresión del recuadro por*** $\cos^2\alpha$**:**

$$\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha}$$

❖ **Ángulos opuestos: Si** $\beta = -\alpha$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\text{sen}\,\beta = \frac{y'}{r} = \frac{-y}{r} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\beta = -\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\cos\beta = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \cos\alpha$$

INVERSAS DE RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Puede observarse la siguiente situación:

Para el ángulo α de 30º; o sea para el arco $\frac{\pi}{6}$, le corresponde el valor de la función seno igual a 0,5; es decir: $0{,}5 = \text{sen}\ \frac{\pi}{6}$.

Esta "relación" implica que $\frac{\pi}{6}$ es el "arco cuyo seno" es 0,5.

Simbólicamente, se puede expresar lo siguiente:

Si "y" es el seno de "x", esto implica que "x" es el "arco cuyo seno" es "y".

$$y = \text{sen}\ x \Rightarrow x = \text{arco sen}\ y$$

La relación "arco seno" es la inversa del seno.

Análogamente:

$$y = \cos x \Rightarrow x = \text{arco coseno}\ y$$
$$y = \text{tg}x \Rightarrow x = \text{arco tg}\ y$$

Tener en cuenta el siguiente cuadro, que ayudará para ubicar el ángulo en el cuadrante correspondiente, conociendo la relación trigonométrica.

Valor de la Relación Trigonométrica	Ángulo agudo dado por la calculadora
Seno – Positivo	α , $(180º - \alpha)$
Seno – Negativo	$(\alpha + 360º)$, $(\lvert\alpha\rvert + 180º)$
Coseno – Positivo	α , $(360º - \alpha)$
Coseno – Negativo	α , $(360º - \alpha)$
Tangente – Positivo	α , $(\alpha + 180º)$
Tangente – Negativa	$(\alpha + 360º)$, $(180º + \alpha)$

Ejemplos:

a) sen α = 0,5 $\rightarrow$ α = 30º (valor de calculadora)

$\rightarrow$ 180º - α = 150º

b) sen α = -0,5 $\rightarrow$ α = -30º (valor de calculadora)

$\rightarrow$ Rtas: -30º + 360º = 330º

$|-30º|$ + 180º = 210º

c) cos α = 0,5 $\rightarrow$ α = 60º (valor de calculadora)

$\rightarrow$ 360º - α = 300º

d) tg α = 1 $\rightarrow$ α = 45º (valor de calculadora)

$\rightarrow$ α + 180º = 45º + 180º = 225º

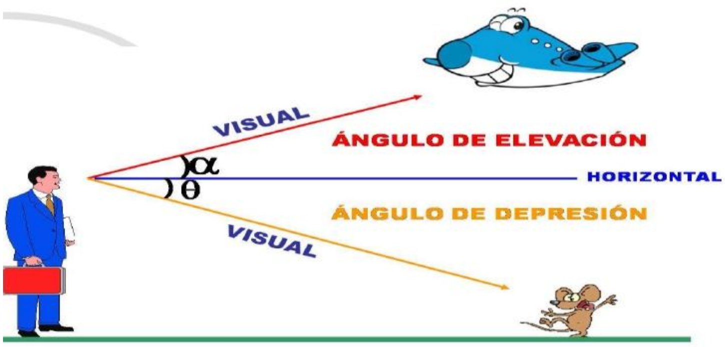
e) tg α = -1 $\rightarrow$ α = -45º (valor de calculadora)

$\rightarrow$ 360º + α = 315º

180º + α = 135º

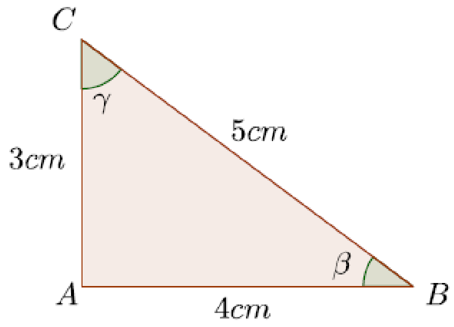
APLICACIÓN DE TRIGONOMETRÍA EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Otro de los conceptos que aplicamos para dar solución a las situaciones planteadas mediante un triángulo rectángulo es el de ANGULO DE ELEVACION Y ANGULO DE DEPRESION.



El término ángulo de elevación denota al ángulo desde la horizontal hacia arriba a un objeto. El término ángulo de depresión denota al ángulo desde la horizontal hacia abajo a un objeto. Una línea de vista para el observador estaría debajo de la horizontal.

EJEMPLO 1: En el siguiente triángulo, el lado $\overline{BC}$ mide 5 cm, el lado $\overline{AC}$ mide 3 cm y el lado $\overline{AB}$ mide 4 cm. Calcular el seno y el coseno de los ángulos β y γ.



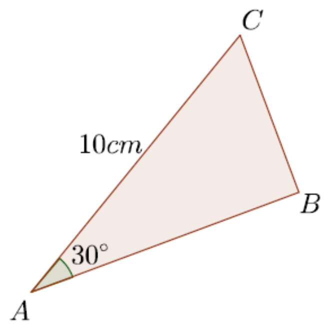
Primero, debemos identificar cuál es el cateto adyacente y cuál es el cateto opuesto para cada ángulo. En el caso del ángulo β, el cateto adyacente es el lado $\overline{AB}$ y el cateto opuesto es el lado $\overline{AC}$; mientras que para el ángulo γ el cateto adyacente es el lado $\overline{AC}$ y el cateto opuesto es el lado $\overline{AB}$. La hipotenusa es el lado $\overline{BC}$.:

Por lo que resulta:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(\beta) = \frac{3}{5} = 0,6 & \operatorname{sen}(\gamma) = \frac{4}{5} = 0,8 \\ \cos(\beta) = \frac{4}{5} = 0,8 & \cos(\gamma) = \frac{3}{5} = 0,6 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(\beta) = 0,6 & \cos(\beta) = 0,8 \\ \operatorname{sen}(\gamma) = 0,8 & \cos(\gamma) = 0,6 \end{array}}$$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

EJEMPLO 2: La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm y uno de sus ángulos mide 30°. ¿Cuánto miden los otros lados?



Para resolver este problema, denotamos A, B y C a los vértices del triángulo, donde B es el vértice del ángulo recto y A es el vértice del ángulo de 30°, que llamamos α. Entonces tenemos que:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|}, \qquad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|}.$$

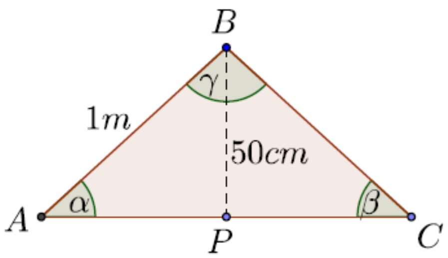
Como $|\overline{AC}| = 10$, $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen}(30°) = \frac{1}{2}$, tenemos que los otros lados del triángulo miden:

$$|\overline{AB}| = 5\sqrt{3}, \qquad |\overline{BC}| = 5.$$

Dado que la unidad de medida es el centímetro, tenemos que el cateto adyacente mide $5\sqrt{3}$cm y el cateto opuesto mide 5 cm.

Es importante que todas las longitudes se expresen en una misma unidad de medida

EJEMPLO 3: En el triángulo isósceles de la figura, los lados iguales miden 1 m, y la altura con respecto al lado restante miden 50 cm. ¿Cuál es la medida de los ángulos?



Si denominamos α y β a los ángulos iguales, y P es el pie de la altura respecto al lado $\overline{AC}$, entonces:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{|\overline{BP}|}{|\overline{AB}|}.$$

Ahora bien, la longitud de $\overline{BP}$ está expresada en centímetros y la longitud de $\overline{AB}$ en metros. Para calcular $sen(\alpha)$ debemos expresar estas longitudes en una misma unidad de medida, cualquiera sea. Si consideramos centímetros, obtenemos:

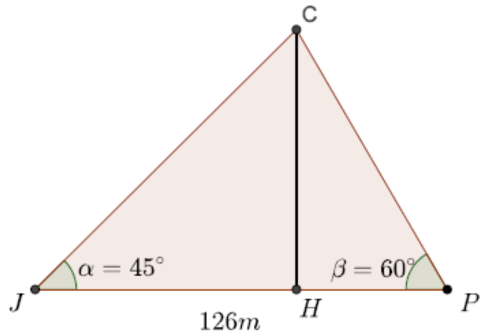
$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2},$$

e idéntico resultado si consideramos metros:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{0{,}5}{1} = \frac{1}{2}.$$

A partir de lo cual se concluye que $\alpha = \beta = 30°$, y el ángulo restante es de $120°$.

EJEMPLO 4: Juan y Pedro ven desde las puertas de sus casas la parte superior de una torre, bajo ángulos de 45° y 60° con respecto al suelo. La distancia entre sus casas es de 126 m y la torre está situada entre sus casas y sobre la línea que las une. Hallar $\overline{CH}$, la altura de la torre.



La figura precedente ilustra gráficamente este problema. El vértice J del triángulo representa la casa de Juan, P la de Pedro, y C es la parte superior de la torre. La altura con respecto al lado $\overline{JP}$, es decir, $\overline{HC}$, determina dos triángulos rectángulos: $\overset{\triangle}{\widehat{JHC}}$ y $\overset{\triangle}{\widehat{PHC}}$. Entonces tenemos que:

$$tg(45°) = \frac{|\overline{HC}|}{|\overline{JH}|}\ , tg(60°) = \frac{\overline{|HC|}}{\overline{|HP|}}$$

Es decir,

$$\overline{|HC|} = \overline{|JH|} \cdot tg(45°), \overline{|HC|} = \overline{|HP|} \cdot tg(60°).$$

Pero además tenemos que:

$$|\overline{JH}| + |\overline{HP}| = \overline{JP} = 126$$

Para simplificar la escritura, llamamos $x = |\overline{JH}|$ y $h = \overline{|HC|}$. Entonces $|\overline{HP}| = 126 - x$, y resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} h = x \cdot tg(45°) \\ h = (126\ -\ x) \cdot tg(60°) \end{cases}$$

Tenemos que: $tg(45°) = 1$ y $tg(60°) = \sqrt{3}$, por lo cual $h = x$ y entonces:

$$h = (126 - h) \cdot \sqrt{3}$$

Luego:

$$\boxed{h = \frac{126\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \sim 79{,}9}$$

Finalmente, la altura de la torre es aproximadamente $79{,}9\ m$.

PRÁCTICAS DE APRENDIZAJE

UNIDAD N° 1

PRACTICA DE APRENDIZAJE Nº 1: CONJUNTOS

Actividad N º 1: Considere el conjunto universal $U = \{x \in \mathbb{N}: x < 10\}$ y los conjuntos:

A = {0, 2, 4, 6, 8}, B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, C = {x∈U: x es dígito mayor que 3}

(I) Representar en el mismo diagrama de Venn los conjuntos dados.

(II) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). JUSTIFICAR los falsos.

a) $7 \in B$

b) $3 \notin C$

c) $5 \notin B$

d) $0 \in A$

e) $9 \notin C$

f) $11 \notin A$

Actividad N º 2: En base a los conjuntos dados colocar $\subseteq$ o $\not\subset$ según corresponda, escribiendo previamente cada uno por extensión, de ser posible:

U = {x / x es número natural}

A = {x∈U / x es número natural impar, x<15}

B = {x∈U / x es número natural múltiplo de 2, x≤ 18}

C = {x∈U / x = 4.n, con n número natural , x≤ 16} (múltiplos de 4)

a) A......U

b) A......B

c) C…..B

d) B…..A

e) B….C

f) C…..A

g) A…..C

h) B…..U

Actividad N º 3:

a) Si $E = \{1,0\}$, razonar cuáles de las afirmaciones siguientes son correctas y cuáles no. Expresar correctamente las incorrectas.

1) $\emptyset \in E$ 2) $0 \subseteq E$ 3) $5 \not\subseteq E$

b) Completar las siguientes propiedades (los diagramas de Venn son a menudo útiles para identificar o justificar las propiedades).

$A \cup U$ =................	$\overline{\phi}$ = ...
$A \cup \phi$ =................	$\overline{U}$ = ...
$A \cap U$ =................	$\overline{\overline{A}}$ = ...

Actividad N º 4:

a) Representar en la recta real los siguientes números: -4; $-\frac{1}{2}$; 1,5 ; $-\frac{5}{2}$; 3,5

b) Colocar el símbolo = o ≠ según corresponda:

$(5+3)^2$ .... 5^2+3^2	$\frac{9+7}{15}$ .... $\frac{9}{15}+\frac{7}{15}$	$\frac{9.7}{15}$ .... $\frac{9}{15}.\frac{7}{15}$
$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$ ……… $\frac{1+2}{2+5}$	$-x^2$ .... $(-x)^2$	3.2^2 .... 6^2

c) Indicar si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados.

0 es un número natural	$\sqrt[3]{-2}$ es un número real	-5 es un número racional
$\frac{\sqrt{2}}{2}$ es un número racional	$\sqrt{-1}$ es un número rea	$(-3)^2$ es un número natural
1,3 es un número irracional	0 es un número entero par	$2,\hat{5}$ es un número racional

Actividad N º 5: Reducir a la mínima expresión, aplicando todas las propiedades que sean posibles.

a) $y^{\frac{1}{2}}\,.\,y^{\frac{3}{4}}.y^{\frac{2}{3}} =$ b) $\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}x\right).3x =$ c) $\frac{3.2^n-4.2^n}{2^n+2.2^{n-1}}$ d) $\sqrt[3]{3x^3-4x^3+\frac{7}{8}x^3}$

e) $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}}.\left(\frac{9}{16}\right)^{-1}.\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{4}}=$ f) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{4}{5}}:\left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{5}}=$ g) $\frac{z^{-3}.a^5.b^{3/2}}{a^{-1}.z^{-7}.b^0} =$

Actividad N º 6: Unir con una flecha según corresponda:

x + x	$2x^2$
x.x	2x
2.x.3.x	$4x^2$
x^2+x^2	$6x^2$
2.x + 4.x	$(2x)^3$
$(2x)^2$	6x
$2.x.4.x^2$	x^2

Actividad N º 7: Determinar un conjunto que contenga todos los elementos sobre los cuales los valores de x tienen significado en el conjunto de los números reales.

a) $\frac{8}{x}$

b) $\frac{4}{x+2}$

h) $\frac{8}{x^2-9}$

i) $\sqrt{x-5}$

c) $\dfrac{0}{x-1}$

d) $\dfrac{x}{3+2}$

e) $\dfrac{4}{x^2}$

f) $\dfrac{-6}{(x-3)(x+3)}$

g) $\dfrac{3}{x^2+3}$

j) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

k) $\dfrac{1}{x^3}$

l) $\dfrac{5}{x^3-1}$

m) $\sqrt[3]{x+5}$

n) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{x-3}}$

Actividad N º 8: Resolver los siguientes ejercicios combinados.

a) $[4^3-5\,(8+2)]:7+2=$	b) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\sqrt{1+\frac{9}{16}}=$
c) $\frac{11\bullet(-3)^2+5^0}{7^2+1}+1^3-3=$	d) $\dfrac{-\frac{1}{5}+\left[\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right]}{-3}$
e) $\dfrac{\frac{1}{4}:\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2-5.\left(\frac{1}{12}\right)^2}}{\frac{8}{9}:\left(\frac{2}{3}\right)^2}$	f) $\sqrt{\frac{5}{4}+1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^0:2$
g) $\sqrt{2^2.3^2}-\left(\frac{3}{5}\right)^{-7}.\left(\frac{3}{5}\right)^5.\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}+\left(3-\frac{1}{2}\div\frac{1}{6}\right)$	h) $\left[-\frac{1}{3}.\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}+\frac{1}{3}\right]:\left[\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]+1$
i) $\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{6}+1{,}2\sqrt{24:(-2)^2}=$	j) $2^3-\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-2(5-10)\right]+\sqrt{2.8}=$

Actividad N º 9:

a) Definir por extensión o intervalo según corresponda, los siguientes conjuntos:

$A = \{\, x \in \mathbb{R}:\ y\ -1 < x \leq 12 \,\}$	$B = \{\, x \in \mathbb{R}:\ 4 < x \,\}$	$C = x \in \mathbb{R} : x+1 = -4 \,\}$
$D = \{\, x \in \mathbb{N}:\ x \leq 12 \,\}$	$E = \{\, x \in \mathbb{N}:\ -4 < x \leq 7\}$	$F = \{\, x \in \mathbb{Z}:\ -4 < x \leq 7\}$
$G = \{x \in \mathbb{N}: -4x = 12\}$	H = {x / x es presidente del Mar Mediterráneo}	I = {x: x es un habitante de la luna}
J = {x: x es vocal de la palabra vals}	$K = \{\, x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\}$	$L = \{x \,/\, x \in \mathbb{N}\ \ y\ \ x^2 - 4 = 0\}$

b) Representar en la recta numérica cada uno de los conjuntos numéricos trabajados en a). Use rectas numéricas distintas para cada conjunto.

Actividad N º 10: A partir de los conjuntos,

$$A = \{1,2,3,4\} \ ; \ B = \{x \in \mathbb{N}_0 : 5 < x \leq 8\} \ ; \ D = \{5,8\} \ ; \ C = \{3,4,5,6\} \ ; \ E = [1,3) \ ; \ F = (2,3]$$

$$G = \{x \in \mathbb{R} : 6 \leq x \leq 8\} \ ; \ H = [7,12] \ ; \ I = \{x \in \mathbb{R} : x > 5\} \ ; \ M = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$$

Resolver cada una de las siguientes operaciones:

$A \cup B$	$A \cap D$	$B \cap D$	$C - D$
$\overline{A \cap C}$ siendo $U = \mathbb{N}_0$	$E \cup F$	$G \cup H$	$G \cap \overline{H}$; $U = \mathbb{R}$
$\overline{H \cap I}$	$B - G$	$I - G$	$\bar{I} \cup H$
$F - \overline{M}$	$\overline{H}$	$\bar{I} \cap D$	$A \cap M$

Un poco más de repaso…

Calcular $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ y $\overline{A}$

a) A = [3 , 5) ; B = [1 , 4]

b) A = (–2, 5) ; B = (–4 , 2]

c) A = ($-\infty$, 4) ; B = [–3 , –1]

d) A = (–2 , 7) ; B = [7 , 9)

e) A = (3 , 6) ; B = (4 , $+\infty$)

f) A = (–3, $+\infty$) ; B = ($-\infty$, –1]

UNIDAD N° 2

PRACTICA DE APRENDIZAJE Nº 2: ECUACIONES – INECUACIONES – SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Actividad N º 1: Determinar el valor de la incógnita:

a) $2x+8=5$

f) $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{2x}{-3}$

b) $\dfrac{y}{4}-\dfrac{7}{3}y=5$

g) 2(x + 2) + 3 = 4 (1– x)

d) $\mathbf{2(x+1)=\dfrac{x-2}{-3}}$

h) $x+\dfrac{x-1}{5}=2x-\dfrac{3-x}{2}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{2x-4}}{8}=\dfrac{1}{4}$

i) $\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{6}{x-2}$

Actividad N º 2: Resolver las siguientes situaciones problemáticas

a) ¿Cuál es el número cuya tercera parte aumentada en $\dfrac{4}{5}$ del mismo, pero disminuida en 5 unidades, sobrepasa en 15 unidades el valor del número dado?

b) Ana y Marisa son mellizas. Luis tiene 4 años más que ellas y Juan la mitad de la edad de Luis. Si la suma de las edades es 41. ¿Qué edad tiene cada uno?

c) Dado un cuadrilátero ABCD, la medida del ángulo $\hat{a}$ excede la medida del $\hat{b}$ en 40º; además el $\hat{d}$ es el duplo del $\hat{b}$ y también la mitad del $\hat{c}$. Obtener la medida de los ángulos.

Actividad N º 3: Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas, clasificando sus raíces por medio del discriminante:

a) $x^2-x-2=0$

e) $(x+1)(x-2)=0$

b) $x^2-4x+13=0$

f) $x^2+36=12x$

c) $\dfrac{x-6}{3x+2}=x-2$

g) $x^2=\dfrac{x+3}{2}$

d) $3(x-12)=7(x-2)+3$

h) $3(x+1)^2=27$

Actividad N° 4: Despejar cada una de las variables que figuran en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $2y - 4 = x^3 - 3$

b) $\frac{x-y}{2} = -1$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{x+9}} - y + 1 = 0$

e) $\frac{1}{x^3+8} - y = 0$

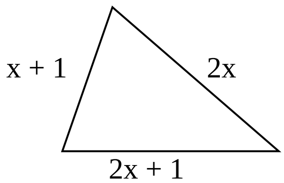
f) $y - \frac{3}{3-x} = 1$

g) $1 = \sqrt{\frac{R-S}{S}}$

Actividad N ° 5: Resolver las siguientes situaciones problemáticas.

a) Si al cuadrado de un número natural se le resta su sucesor, se obtiene el cuadrado de su antecesor. ¿Cuál es ese número?

b) En el siguiente triángulo el perímetro es igual a 12cm. Determinar cuánto mide cada lado y clasificar el triángulo.



d) La longitud de los lados de un triángulo son números naturales consecutivos. Si el perímetro del triángulo es de 18cm. Encontrar los lados del triángulo.

e) La ecuación de segundo grado $ax^2 + 10x + a = 0$ tiene dos raíces iguales. Hallar el/los valores de a que lo hacen posible, y escribir el/los polinomios encontrados.

f) Calcular el valor del coeficiente b en la ecuación $5x^2 + bx + 6 = 0$ sabiendo que una de sus soluciones es 1.

g) ¿Para qué valores de a la ecuación $x^2 - 6x + 3 + a = 0$ tiene solución única?

Actividad N ° 6: Resolver las siguientes inecuaciones, escribir luego la solución como intervalo, de ser posible.

a) $2x - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}x$

b) $2x + 4 \geq 6$

c) $9 < 3 - 2x < 13$

d) $x - 2.(1 + x) > 7$

e) $x^2 - (3x+1) < (x-1)(x+2)$

f) $9x - 1 > 3(5x + 4)$

Actividad N º 7: Completar el siguiente cuadro:

Ejercicio	Valor absoluto	Resolver	Graficar	Expresar como Intervalo o por extensión
1)	$\lvert x-1\rvert+2\le 3$			
2)	$3.\lvert 1-2x\rvert>1$			
3)	$\left\lvert\frac{2+3x}{3}\right\rvert<1$			
4)	$\left\lvert\frac{1-2x}{2}\right\rvert>2$			
5)	$\lvert 2x-2\rvert\le 5$			
6)	$\lvert x-2\rvert=4$			
7)	$1+\lvert 2x\rvert=3$			

Actividad N º 8: Determinar los siguientes conjuntos y expresarlos, de ser posible, como intervalos:

$A = \{ x \in Z : | x - 2 | = 4 \}$

$B = \{ x \in N_0 : x^2 - 1 \le 3 \}$

$C = \{ x \in R : x^2 - 1 \le 3 \}$

$D = \{ x \in Z : | x | - 1 = 1 \text{ o } | x | + 3 = 3 \}$

$E = \{ x \in R : | -2x | > 4 \} \cup \{ x \in N : | x + 1 | < 4 \}$

$F = \{ x \in Z : | 1 - x | \le 2 \text{ y } x^2 \le 4 \}$

$G = \{x / x \in \boldsymbol{Z} \text{ y } |x-2| = 3\}$

$H = \{ x / x \in \mathbf{R}: | 2x - 1 | < 3 \} \cup \{x / x \in N \text{ y } |x+1| = 3\}$

$I = \{x/x \in \boldsymbol{Z}: |2x| < 5\} \cup \{x/x \in N: 5 - x^2 > 4\}$

Actividad N º 9: **Para cada uno de los Sistema de Ecuaciones Lineales dados a continuación, hallar analíticamente el conjunto solución S. Luego, resolver gráficamente los apartados b), f), g) para corroborar lo obtenido analíticamente. Clasificar cada sistema.**

a) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ x+3y=10 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - y = 12 \\ 2x+3y = -8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ x + y = 6 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 3 = 2y \\ 2x - 4y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x - 9y = 3 \\ -2x = -3y + 9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ -3x + 2y = -6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ -6x + 4y = -18 \end{cases}$

Actividad N º 10: Resolver cada una de las siguientes situaciones problemáticas.

a) La suma de dos números es 28 y su diferencia es 8 ¿Cuáles son dichos números?

b) La edad de Juan es el quíntuplo de la edad de Carlos y la suma de ambas es 78 ¿Qué edad tiene cada uno?

c) Si se aumenta en 2cm el largo y el ancho de un rectángulo, el perímetro es 24cm. Si el largo se disminuye en 2cm resultará un cuadrado ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

d) El perímetro de un solar rectangular mide 40 metros. Si su ancho es la tercera parte de su largo. ¿Cuánto miden los lados del solar?

e) En una clase el 70% son chicos. Además, se sabe que hay 12 chicas menos que chicos. ¿Cuántas chicas y chicos hay?

f) En un grupo de 9 personas hay doble número de mujeres que de hombres. ¿Cuántos hay de cada sexo?

g) En una jaula donde hay conejos y palomas se totalizan 35 cabezas y 94 patas ¿Cuántos animales de cada clase hay?

h) Un lado de un triángulo isósceles mide 3 cm menos que la suma de los dos lados iguales. El perímetro es de 33 cm. ¿Cuánto mide cada lado?

i) Hallar el valor de los coeficientes b y c en la ecuación $7x^2 + bx + c = 0$ sabiendo que sus soluciones son $x_1 = 5$ y $x_2 = -6$.

j) Calcular el valor de a y b para que la ecuación $ax^2 + bx - 1 = 0$ tenga por soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$.

UNIDAD N° 3

PRACTICA DE APRENDIZAJE Nº 3: EXPRESIONES ALGEBRAICAS – POLINOMIOS

Actividad N º 1: Decir si las siguientes expresiones son polinomios, en caso de no serlo indicar porqué.

a) $P(x) = 5x^6 - \sqrt{3}\,x^4 - 2x + x^2$ b) $Q(x) = 2x^3 + 9x^2 + 8x^{-1} + 5$ c) $R(x) = 3\sqrt{x} + 5x - 6$

Actividad N º 2: Indicar el grado y el coeficiente principal de cada uno de los siguientes polinomios. Luego analizar si están completos, ordenados o ambos. En caso de no estarlo escribirlos completos y ordenados en forma decreciente.

a) $P(x) = x^2 + 3x - 4$ **b)** $P(x) = x^4 + 5x^7 - 4x$ **c)** $P(x) = x^2 + 3x - 4x^3 + 2$ d) $P(x) = x^3 + 3x^5 - 2$

Actividad N º 3: Teniendo en cuenta los siguientes polinomios, resolver las siguientes operaciones:

$R(x) = 2x + 2$; $N(x) = -2x^4 - 3x^2 + 1$; $Q(x) = 3x^2 - 2x + 4$; $H(x) = x - \frac{1}{2}$; $P(x) = 4x^2 - 1$; $S(x) = x^2 + 2x$

a) $N(x) - 2H(x) + R(x)$
b) $N(x): P(x)$
c) $-3R(x) + Q(x).H(x)$
d) $N(x): S(x)$
e) $Q(x).N(x) + P(x)$
f) $N(x):H(x)$
g) $[R(x)]^2$

Actividad N º 4: **Hallar el valor numérico de los siguientes polinomios e indicar si el valor dado es raíz.**

a) $P(x) = x^2 + 3x - 4$, para $x = 1$ b) $P(x) = x^2 + 3x - 4x^3 + 2$, para $x = 0$

Actividad N º 5: Sin hacer la división, decir cuál es el resto de dividir el polinomio $P(x)$ en $Q(x)$. En base a su respuesta, determine si P(x) es divisible en Q(x).

a) $P(x) = x^3 - x + 1$, $Q(x) = x - 2$
b) $P(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 3$, $Q(x) = x - 3$
c) $P(x) = x^2 + 6x + 9$; $Q(x) = x + 3$
d) $P(x) = x^3 + 1$; $Q(x) = x + 1$

Actividad N º 6: Aplicar la regla de Ruffini para calcular las siguientes divisiones y verificar el resto por el teorema de resto.

a) $P(x) = 7x^3 - 11x^2 - 12x + 45$, $Q(x) = x - 3$ b) $P(x) = x^2 + 4x + 6$, $Q(x) = x + 2$

Actividad N º 7: Resolver los siguientes apartados,

a) Si $H(x) = mx^3 + 6x^2 + 100$, siendo m un número entero, analizar si 5 es un cero de dicho polinomio.
b) Calcular k para que $P(x) = kx^3 + 2x^2 - 1$ sea divisible por $Q(x) = x + 1$
c) Determinar el valor de b para el cual el polinomio $M(x) = x^6 + bx^3 + -5x^2 - 7$ tiene resto 3 en la división por $x + 2$.

Actividad N º 8: Usando el teorema Fundamental del Algebra, factorizar los siguientes polinomios. Tenga en cuenta los casos especiales estudiados (factor común, diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto), que podrían simplificar el proceso.

a) $P(x) = x^2 - 2x + 1$
b) $Q(x) = (x^2 - 3x - 1).(x - 1)$
c) $M(x) = x^4 - 16$
d) $S(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$
e) $A(x) = 2x^2 - 6x$
f) $Z(x) = 2x^3 - 18x$
g) $N(x) = (x^2 + 2x - 3)(5x + 10)(2x + 2)$
h) $T(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

Actividad N º 9: Resolver cada operación, para reducir a la mínima expresión:

a) $-\dfrac{1}{x^2 - x} + \dfrac{2}{x^2 - 1}$

b) $x - \dfrac{3}{x-2}$

c) $\dfrac{x^3+7x^2+8x-16}{(2x-2).(x^2-16)}$

d) $\dfrac{x^4+4x^3+x^2-6x}{2x^2+2x-4}$

e) $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + x - 2} \bullet \dfrac{x^2+5x+6}{x^2 + x - 6}$

f) $\dfrac{x^3-x^2-10x-8}{4x^2-12x-16}$

g) $\dfrac{2x^3-8x}{x^3+4x^2+4x}$

h) $\dfrac{9x+27}{x^3 + 6x^2 + 9x} : \dfrac{9x-27}{2x^3-18x}$

i) $\dfrac{(x^2+2x).(5x+10)}{3x^2+12x+12}$

j) $\dfrac{x^2-6x+9}{5x-15} \bullet \dfrac{3x^2-27}{4x+12}$

UNIDAD N° 4

PRACTICA DE APRENDIZAJE Nº 4: TRIGONOMETRÍA

Actividad Nº 1:

a) Expresar en radianes los siguientes ángulos: 210º y 70º

b) Representar en grados sexagesimales los siguientes ángulos: $7\pi/6$ rad y 3,5 rad

Actividad Nº 2: Haciendo uso de la calculadora, obtener el valor de las siguientes razones trigonométricas. En base a los valores obtenidos de senos y cosenos, ¿qué puede observar?

a) sen 100º =

b) cos 0,5 =

c) tg 20º 10' 3'' =

d) cotg 2,6º =

e) cotg 2,6 =

f) sec 20,1 =

g) cosec 142º 15'' =

Actividad N° 3:

a) Sea γ un ángulo del cuarto cuadrante tal que cos γ = 4/5. Hallar sen γ y tan γ

b) Sea ω un ángulo del segundo cuadrante tal que sen ω = 3/4. Hallar cos ω y tan ω

c) Calcular sen α y tg α, sabiendo que cos $\alpha = -\frac{3}{5}$ y α es un ángulo del segundo cuadrante.

d) Calcular cos α y cotg α, sabiendo que sen $\alpha = \frac{1}{2}$ y α es un ángulo del segundo cuadrante.

Actividad N ° 4: Calcular todas las razones trigonométricas en los siguientes casos

a) tan θ = 4 y θ está en el tercer cuadrante

b) tan θ = –2 y θ está en el cuarto cuadrante

c) $\text{sen}\, \delta = \frac{1}{3},\ \delta < \frac{\pi}{2}$

d) $\cos \alpha = -\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

e) $\text{cosec}\beta = -\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$

f) sen $\alpha = \frac{4}{5}$ y α es un ángulo del segundo cuadrante.

g) $\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y α está en el tercer cuadrante.

Actividad N º 5: **Determinar ξ sabiendo que:**

a) sen ξ = 0,69465 y ξ está en el segundo cuadrante

b) tan ξ = –1,42814 y ξ está en el segundo cuadrante

c) cos ξ = –0,65606 y ξ está en el tercer cuadrante

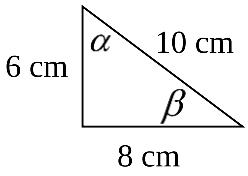
d) tan ξ = –2 y ξ está en el cuarto cuadrante

e) sen ξ = –1/3 y ξ está en el tercer cuadrante

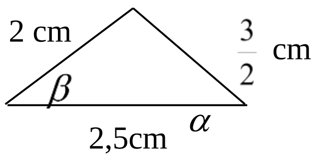
f) tan ξ = 2,5 y ξ está en el primer cuadrante

Actividad N º 6: En los siguientes triángulos rectángulos, calcular: seno, coseno y tangente de α y β.

a)



b)



c) Encontrar los ángulos de un triángulo rectángulo sabiendo que los catetos miden 20cm y 35 cm.

d) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20cm y uno de los catetos 15cm. Determinar la medida de los ángulos.

Actividad N º 7: Resolver las siguientes situaciones problemáticas

a) Desde un avión que vuela a 500m de altura se divisa una boya. La visual dirigida desde el avión a la boya forma con la vertical un ángulo de 45°. Determinar a qué distancia de la boya se encuentra el avión.

b) Un dirigible que está volando a 800 metros de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia se encuentra del pueblo?

c) ¿Qué altura debe tener un poste que sostendrá una antena si uno de los cables que la sujeta tiene de longitud 19 m y forma un ángulo de 65° con el piso?

d) Un árbol se quebró y su extremo superior forma con el piso un ángulo de 48° si éste quedó a una distancia de 7m de la base del árbol. ¿Cuánto mide el árbol?

e) Dos de los ángulos interiores de un triángulo miden 60º y π/4 radianes. Calcular la medida del tercer ángulo interior en grados sexagesimales y en radianes.