UNIDAD N° 1: TEORÍA DE CONJUNTOS – CONJUNTOS NUMÉRICOS

ÍNDICE GENERAL DE LA UNIDAD

❖ Noción intuitiva de conjunto ………………..	3
❖ Formas de definir un conjunto…………………….…..…….	3
❖ Conjuntos notables………………………………………………..	4
❖ Pertenencia, Inclusión y Operaciones con Conjuntos	4
❖ Propiedades de las Operaciones entre Conjuntos	6
❖ Conjuntos numéricos………………………….……...	7
❖ Números Naturales: N……….…………………..…………………	7
❖ Números enteros: Z…………………………….…………………………….	7
❖ Números racionales: Q………………….………………………….......	7
❖ Números irracionales: I…..……………… ……......	8
❖ Números reales: R…………….……………………………....	8
❖ Representación Gráfica De Los Números Reales	8
❖ Notación Científica	8
❖ Números Complejos: C……….……………………………...	9
❖ Operaciones con números reales………..………………....	11
❖ Suma o resta de números fraccionarios……………………..	11
❖ Multiplicación de números fraccionarios…….……..…….	12
❖ División de números fraccionarios.……………….……..…….	13
❖ Potenciación de números fraccionarios...…….……...…….	13
❖ Radicación de números fraccionarios…….……….…..…….	14
❖ Propiedades de las operaciones……….……….…..…….	14
❖ Propiedad distributiva del producto respecto a la suma…...…….	14
❖ Propiedad distributiva del cociente respecto a la suma…..…….	14
❖ La Fracción como expresión de porcentajes.	18
❖ Orden en el Conjunto R …………………………………	19
❖ Propiedades de la igualdad y Desigualdad en R …………..	20
❖ Subconjuntos de los Números Reales: Intervalos.………………………..	21
❖ Tipos de Intervalos…………………………….….…...…….	21
❖ Operaciones con Intervalos	23
❖ Ejercicios Prácticos	25

CONSEJOS A TENER EN CUENTA ANTES DE EMPEZAR:

- ✓ ***LEER CON MUCHA ATENCIÓN LOS CONTENIDOS.***
- ✓ ***PONER ÉNFASIS EN LOS EJEMPLOS.***
- ✓ ***RESOLVER MINUCIOSAMENTE LOS EJERCICIOS.***
- ✓ ***CONSULTAR LAS DUDAS QUE PUEDAN SURGIR.***

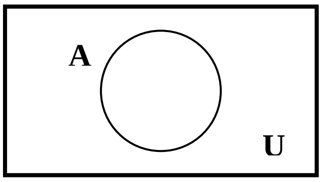
CONJUNTOS

NOCIÓN INTUITIVA DE CONJUNTO

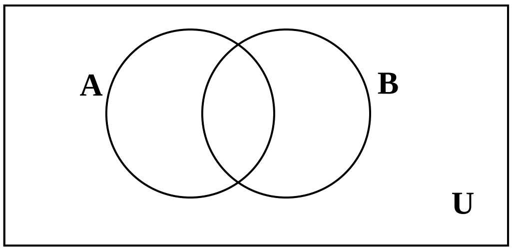
La palabra CONJUNTO nos remite, intuitivamente a una agrupación o colección de objetos que reciben el nombre de elementos. Un conjunto es cualquier colección (finita o infinita) de elementos de cualquier naturaleza.

Todo conjunto está inmerso en otro conjunto llamado Universal .Se denotan con letras mayúsculas y a sus elementos con minúsculas. Es usual representarlos por medio de Diagramas de Venn.

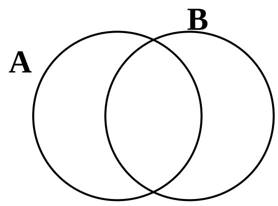
Considere en los casos correspondientes dos Conjuntos Ay B.



El diagrama de Venn más general para representar dos conjuntos cualesquiera es:



o simplemente



Los diagramas de Venn sólo se utilizan para representar gráficamente conjuntos **finitos.**

FORMAS DE DEFINIR UN CONJUNTO

Si queremos indicar el conjunto de las vocales podemos escribir:

A = {x / x sea una vocal} ó A = {a, e, i, o, u}

Un conjunto está definido por **extensión o enumeración, cuando entre llaves figuran** todos sus elementos.

Ejemplos:

a) A = {a, e, i, o, u}

b) B = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

Un conjunto está definido por **comprensión,** cuando se enuncia la propiedad que caracteriza a sus elementos.

Ejemplos:

a) A = {x / x sea una vocal} **b)** B = {x / x es día de la semana}

CONJUNTOS NOTABLES

Conjunto Vacío: se simboliza con ϕ y es aquel conjunto que no posee elementos.

Ejemplo: A = {números impares entre 5 y 7} = ∅

No existe ningún número impar entre los números 5 y 7.

Conjunto Universal: se simboliza con **U** y es aquel conjunto que contiene todos los elementos del tema en estudio; por lo tanto no es fijo y se debe fijar de antemano.

Nota: Si un conjunto tiene **n** elementos, se dice que es **finito**, caso contrario el conjunto es **infinito**.

PERTENENCIA, INCLUSIÓN Y OPERACIONES CON CONJUNTOS

En el siguiente cuadro presentamos algunas definiciones y su correspondiente notación.

$x \in A$ $x \notin A$	El elemento x pertenece al conjunto A El elemento x no pertenece al conjunto A
$A \subseteq U$	A es subconjunto del Universo U
$A \subseteq B$	A es subconjunto de B , Si $x \in A$, entonces $x \in B$
$A \cup B$	A unión $B = A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$
$A \cap B$	A intersección $B = A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$
$A - B$	A menos $B = A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$
A'	Complemento de $A = A' = \{x / x \in U \wedge x \notin A\}$

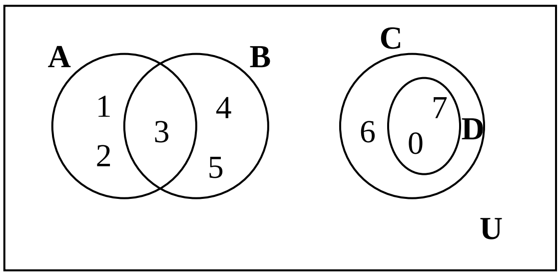
Ejemplos:

a) $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$

b) $\{2, 4, 6\} \subseteq \{2, 4, 6, 8\}$

c) $\{1, 3, 6, 7\} \not\subset \{1, 3, 6, 9\}$

d) $U = \{x / x \in N_0 \text{ y } x \leq 7\}$



$A \subseteq U$

$B \subseteq U$

$C \subseteq U$

$D \subseteq U$

$D \subseteq C$

Observación: Para cualquier conjunto A se verifica que:

- $\phi \subseteq A$
- $A \subseteq A$
- $A \subseteq U$

La **pertenencia** vincula **elementos** con **conjuntos** y la **inclusión** vincula **conjuntos** con **conjuntos.**

EJERCICIO:

Un grupo de amigos se inscriben en dos torneos, de futbol y de básquet. Algunos se inscriben en los dos. Sean A= {amigos que se inscriben en el torneo de futbol} y

B= {amigos que se inscriben en el torneo de básquet}

El conjunto Universal es U = **{Juan, Diego, Esteban, Pablo, Ramiro, Matías, Luciano}**

¿Qué representan los conjuntos AUB, A∩B, A-B y A´?

La siguiente tabla muestra dicha información.

	Futbol	Básquet
Juan	x	
Diego	x	x
Esteban		x
Pablo	x	
Ramiro		x
Matías	x	x
Luciano		

Respuesta:

AUB = {Juan, Diego, Esteban, Pablo, Ramiro, Matías}

A∩B = {Diego, Matías}

A-B = {Juan, Pablo}

A´= {Esteban, Ramiro, Luciano}

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Las operaciones con conjuntos verifican las siguientes propiedades:

- **Propiedad conmutativa**

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cap B = B \cap A$

- **Propiedad asociativa**

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- **Propiedad distributiva**

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- **Propiedad de idempotencia**

a) $A \cup A = A$

b) $A \cap A = A$

- **Leyes de De Morgan**

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

ACTIVIDADES

1) Sean $U = \{x / x \in N_0 : 0 \leq x \leq 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x / x \in N_0 : 5 \leq x \leq 8\}$, $D = \{3, 4\}$; $C = \{3, 4, 5, 6\}$; calcular por extensión y hacer el diagrama de Venn correspondiente

a) $A \cup B$

b) $D \cap B$

c) $A – B$

d) $C \cup D$

e) $A \cap C$

f) $\overline{A}$

g) $D – C$

h) $\overline{A \cap B}$

2) Completar las siguientes propiedades (los diagramas de Venn son a menudo útiles para identificar o justificar las propiedades).

a) $A \cup U$ =................

b) $A \cup \phi$ =................

c) $A \cap U$ =................

e) $\overline{\phi}$ = ...

f) $\overline{U}$ = ...

g) $\overline{\overline{A}}$ = ...

CONJUNTOS NUMÉRICOS

- **Números Naturales: N**

Los números naturales fueron los primeros que utilizó el ser humano para contar objetos. El conjunto de los números naturales tiene infinitos elementos y se simboliza

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4,5,\ldots..\}$$

Los puntos suspensivos indican que en N no hay último elemento, pero sí existe primer elemento que es el número 1y además todo número natural, llamémosle x, tiene su número natural consecutivo o siguiente, x + 1.

Al conjunto de los naturales con el cero incluido, se simboliza:

$$\mathbf{N_0} = \{0,1, 2, 3, 4,5,\ldots..\}$$

Los números naturales constituyen un conjunto **cerrado** para las operaciones de **suma** y **multiplicación** ya que, al operar con cualquiera de sus elementos, el resultado siempre será un número natural:

5 + 6 = 11; 8.5 = 40.

No ocurre lo mismo, en cambio, con la **resta**; por ejemplo 8 – 3 es un número natural, pero 3 – 8 no es un número natural; como consecuencia de ello surgen los **números negativos.**

❖ **<u>Números enteros</u>: Z**

Los **números enteros** abarcan a los números **naturales**, el **cero** y a los **números negativos**.

Z = {…..,-5,-4,-3,-2,-1,0,1, 2, 3, 4,5,…..}

Todo número natural es un número entero.

Los números enteros permiten expresar cantidades negativas como un saldo deudor en una cuenta bancaria, un año de la era antes de Cristo, el número de una planta del sótano de un edificio, la representación de profundidades bajo el nivel del mar, temperaturas bajo cero, etc.

El conjunto de los números enteros es **cerrado** para la suma, la resta y el producto; sin embargo, la división de dos números a/b no siempre es un número entero. Es por ello que surge el conjunto de los números fraccionarios o racionales.

❖ **<u>Números racionales</u>: Q**

Se llama **números racional** a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros con denominador **distinto de cero**.

El término «racional» alude a «ración» o «parte de un todo».

Un número racional es un decimal finito o infinito periódico; por ejemplo, el número decimal finito 0,75 es la representación decimal del número racional $\frac{3}{4}$ y el número decimal infinito periódico 0,333... es la representación decimal del número racional $\frac{1}{3}$.

Luego, un número es racional si verifica alguna de las siguientes condiciones:

- *es un número entero (positivo, negativo o 0).*
- *es un número fraccionario.*
- *es un número decimal, con un número finito de cifras.*
- *es un número decimal periódico.*

❖ **<u>Números irracionales</u>: I**

Los números decimales que tienen infinitas cifras no periódicas, se denominan **números irracionales**: π, $\sqrt{2}$, e, $\sqrt{3}$, etc.

❖ **<u>Números reales</u>: R**

El conjunto formado por los números irracionales y racionales es el conjunto de los **números reales**.

Todo número natural es un número real.

Todo número entero es un número real.

Todo número racional es un número real.

Todo número irracional es un número real.

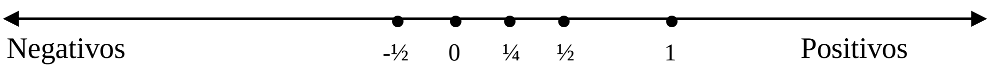
REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS REALES

Los números reales se representan geométricamente en la recta numérica, esto es, se indica sobre una recta un punto fijo **O** que se llama **origen** y que corresponde al número real cero.

Considerando un segmento unitario como unidad de medida, a la derecha de **O** se indican los puntos que corresponden a los números reales positivos ($\mathbf{R}^{+}$) y a la izquierda de **O** los puntos que corresponden a los números reales negativos ($\mathbf{R}^{-}$).

De esta manera, a cada número real le corresponde un único punto de la recta, y a cada punto de la recta, un único número real. Para representar gráficamente un número fraccionario en la recta numérica, se divide la unidad en tantas partes como lo indique el denominador de la fracción y luego se toman tantas partes de la subdivisión como lo indique el numerador.

Ejemplo:



A tener en cuenta!!!

Entre dos naturales siempre hay un número finito de naturales entre ellos.

Entre dos números enteros hay un número finito de enteros entre ellos.

Entre dos números racionales hay infinitos racionales entre ellos.

Entre dos números reales hay infinitos reales entre ellos.

$$\mathbf{R}\ REALES \begin{cases} \mathbf{Q}\ Racionales \begin{cases} \mathbf{Z}\ \ Enteros \begin{cases} \mathbf{N}\ \ Naturales \\ \quad Enteros\ Negativos \end{cases} \\ Fraccionarios \end{cases} \\ Irracionales \end{cases}$$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Cuando manejamos números muy grandes o muy pequeños tenemos dificultad para interpretarlos y para introducirlos en algunas calculadoras. Es usual, para ellos, representarlos mediante notación científica. Se dice que **un número está expresado en notación científica** cuando se escribe como el producto de un número mayor que 1 y menor que 10, multiplicado por una potencia entera de diez.

Ejemplos: Escribir los siguientes números en notación científica

9.800.000.000.000= 9,8 **.** 10^{12}

321.567.809.121.324 ≅ 3,21**.** 10^{14}

0,0000000000112 = 1,12 **.** 10^{-11}

0,00000000000134532 = ≅ 1,34**.** 10^{-12}

❖ **<u>Números Complejos</u>: C**

Al tratar de resolver igualdades como $x^2 + 4 = 0$, aparecen expresiones como $\sqrt{-4}$ que no es posible resolver en el conjunto de los números reales, ya que ningún número real elevado al cuadrado es igual a –4.Por ello surgieron los **números imaginarios** para que sea posible la radicación de números reales negativos: $\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4}\,.\,\sqrt{-1} = 2.i$

Se denomina **unidad imaginaria** a **i =** $\sqrt{-1}$ y es tal que $\mathbf{i}^2 = -1$

Los números complejos son combinaciones algebraicas de números reales con números

imaginarios.

Todo número natural es un número complejo.
Todo número entero es un número complejo.
Todo número racional es un número complejo.
Todo número irracional es un número complejo.
Todo número real es un número complejo.

<u>ACTIVIDADES</u>

1. Dar un ejemplo de un número:

a) entero no natural

b) imaginario puro

c) real no entero

d) fraccionario entero

2. Indicar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) 0 es un número natural.

b) 6 es un número entero.

c) $\sqrt[3]{-2}$ es un número real.

d) -5 es un número racional.

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ es un número racional.

f) $\sqrt{-1}$ es un número real.

g) $(-3)^2$ es un número natural.

h) 1,3 es un número irracional

i) Con los elementos de **Q** se puede medir cualquier longitud.

j) Todo número entero es positivo o negativo.

k) 0 es un número entero par.

l) –5 está a la derecha de –7 en la recta numérica.

3. Dados los siguientes conjuntos:

A = {0, 2, 4, 6, 8}, B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, C = {x/x es dígito mayor que 3}

Indicar verdadero (V) o falso (F) en las siguientes afirmaciones:

a) $7 \in B$

b) $3 \notin C$

c) $8 \in A$

d) $5 \notin B$

e) $0 \in A$

f) $9 \notin C$

g) $11 \notin A$

h) $8 \in B$

4. Escribir un número real que esté comprendido entre cada par de números dados.

a) 0,6 y 0,8

b) 0 y 1

c) 2,34 y 2,36

d) 2,34 y 2,35

e) 0,9 y 1

5. Representar, en un mismo diagrama de Venn, los siguientes conjuntos:

U = {x/x es dígito}, A = {0, 2, 4, 6, 8}, B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, C = {x/x es dígito mayor que 3}

6. En base a los conjuntos dados colocar $\subseteq$ o $\not\subset$ según corresponda:

U = {x / x es número natural}

A = {x / x es número natural impar}

B = {x / x es número natural múltiplo de 2}

C = {x / x = 4.n, con n número natural}

a) A......U

b) A......B

c) C…..B

d) B…..A

e) B….C

f) C…..A

g) A…..C

h) B…..U

7. Representar en la recta real los siguientes números: -4; $-\frac{1}{2}$; 1,5; $-\frac{5}{2}$, 3,5

OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

❖ **Suma o resta de números fraccionarios**

A) Fracciones de igual denominador

Para sumar (o restar) dos números fraccionarios de igual denominador se procede de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}}$$

Ejemplos:

a) $\frac{3}{5}+\frac{9}{5}=\frac{3+9}{5}=\frac{12}{5}$ **b)** $\frac{3}{5}-\frac{9}{5}=\frac{3-9}{5}=\frac{-6}{5}$

B) Fracciones de distinto denominador

Para sumar (o restar) dos números fraccionarios de igual denominador se procede de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{(m:b).a\pm(m:d).c}{m}\;;\quad \text{donde } m = \text{m.c.m}(b,d)$$

Ejemplos:

a) $\frac{3}{5}+\frac{9}{15}=\frac{3.3+1.9}{15}=\frac{9+9}{15}=\frac{18}{15}$ **b)** $\frac{3}{5}-\frac{9}{15}=\frac{3.3-1.9}{15}=\frac{9-9}{15}=\frac{0}{15}=0$

❖ **Multiplicación de números fraccionarios**

Para multiplicar dos números fraccionarios se procede de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}}$$

En la multiplicación de fracciones se simplifica cruzado.

Ejemplos:

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2.5}{3.7}=\frac{10}{21}$

b) $\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{4}=\frac{8.15}{9.4}=\frac{\overset{10}{\cancel{120}}}{\underset{3}{\cancel{36}}}=\frac{10}{3}$

Si se simplifica antes de multiplicar se obtiene: $\frac{\overset{2}{8}}{9}\cdot\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{3}{\cancel{4}}}=\frac{\cancel{2}}{\underset{1}{\cancel{3}}}\cdot\frac{5}{1}=\frac{2.5}{3.1}=\frac{10}{3}$

❖ **División de números fraccionarios**

Para dividir dos números fraccionarios se procede de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.c}}$$

En la división de fracciones se simplifica horizontalmente.

Ejemplos:

a) $\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{2.7}{3.5}=\frac{14}{15}$

b) $\frac{16}{3}:\frac{8}{5}=\frac{16.5}{3.8}=\frac{\overset{10}{\cancel{80}}}{\underset{3}{\cancel{24}}}=\frac{10}{3}$

Si se simplifica antes de multiplicar se obtiene: $\frac{\overset{2}{16}}{3}:\frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{5}=\frac{\cancel{2}}{3}:\frac{1}{5}=\frac{2.5}{3.1}=\frac{10}{3}$

❖ **Potenciación de números fraccionarios**

a) De exponente natural:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\text{, con } b\neq 0$$

b) De exponente entero negativo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}\text{, con } b\neq 0,\ a\neq 0$$

En particular: $(a)^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}$ con $a\neq 0$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4^2}{3^2}=\frac{16}{9}$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{1}\right)^2=\frac{4^2}{1^2}=\frac{16}{1}=16$

d) $(-3)^{-2}=\left(\frac{-1}{3}\right)^2=\frac{(-1)^2}{3^2}=\frac{1}{9}$

❖ **Radicación de números fraccionarios**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\text{, con } b\neq 0$$

Si **n es par** entonces $\frac{a}{b}$ debe ser **mayor o igual a cero**.

Ejemplos:

a) $\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}=\frac{3}{5}$

b) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}=-\frac{2}{3}$

PROPIEDADES DE ALGUNAS OPERACIONES

- **Propiedad distributiva del producto respecto a la suma:**

$$(a+b)\bullet c = a\bullet c + b\bullet c \quad \text{con } a,b,c \in \mathbb{R}$$
$$a\bullet(b+c) = a\bullet b + a\bullet c \quad \text{con } a,b,c \in \mathbb{R}$$

- **Propiedad distributiva del cociente respecto a la suma:**

$$(a+b):c = a:c + b:c \quad \text{con } a,b,c \in \mathbb{R} \quad c \neq 0$$

- **Propiedades de la potenciación:**

$a^0 = 1$, con $a \neq 0$

$1^n = 1$

Potencia de un producto: $(a\bullet b)^p = a^p \bullet b^p$; con $p \in \mathbb{Q}$

Potencia de un cociente $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$; con $p \in \mathbb{Q}$ $b \neq 0$

Potencias de potencias: $(a^p)^q = a^{p\cdot q}$; con p y $q \in \mathbb{Q}$

Producto de potencias de igual base: $a^m \bullet a^p = a^{m+p}$

Cociente de potencias de igual base: $\dfrac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$; con $a \neq 0$

- **Propiedades de la radicación:**

Radicación de un producto: $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

Radicación de un cociente: $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$, con $b \neq 0$

Radicación como potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Ejemplos:

a) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^5 . \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{5+(-3)} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$

b) $z^2.z^{-1}.z^{-3}.z^5 = z^3$

c) $3^2.3^{-3}.3^{-4}.3 = 3^{-4} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{1}{81}$

d) $b^5 : b^2 = b^{5-2} = b^3$

e) $\dfrac{y^6}{y^7} = y^{6-7} = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$

f) $\dfrac{5^3}{(7-2)^3} = 5^{3-3} = 5^0 = 1$

g) $(2^2)^3 = 2^{2.3} = 2^6 = 64$

h) $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^4\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

Cuidado !!!

La potenciación y la radicación no son distributivas ni respecto de la suma ni respecto de la resta

Éste es un error muy frecuente entre los estudiantes del nivel medio. Por ello proponemos comparar los siguientes cálculos

sí !!! no...!!!

Cálculos correctos	Cálculos incorrectos
$(2+3)^2 = 5^2 = 25$	$(2+3)^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$
$(7-4)^2 = 3^2 = 9$	$(7-4)^2 = 7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33$
$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$	$\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
$\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$	$\sqrt{25-16} = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$

La radicación y potenciación NO distribuyen respecto de la suma o resta.

ACTIVIDADES

1. **Unir con una flecha según corresponda:**

$x + x$	$2x^2$
$x.x$	$2x$
$2.x.3.x$	$4x^2$
$x^2 + x^2$	$6x^2$
$2.x + 4.x$	$(2x)^3$
$(2x)^2$	$6x$
$2.x.4.x^2$	x^2

2. Colocar el símbolo = o ≠ según corresponda, para que los siguientes enunciados sean verdaderos.

a) $(20 - 7) - 8$ ………. $20 - (7 - 8)$

b) $(5 + 3)^2$ ………. $5^2 + 3^2$

c) $\frac{9+7}{15}$ ……… $\frac{9}{15}+\frac{7}{15}$

d) $\frac{9.7}{15}$ ……… $\frac{9}{15}.\frac{7}{15}$

e) $\frac{9+5}{25}$ ……… $\frac{9+1}{5}$

f) $\frac{9.5}{25}$ ……… $\frac{9}{5}$

g) $1-\frac{2}{3}$ ………$1+\left(\frac{-2}{3}\right)$

h) $-x^2$ ……… $(-x)^2$

i) 3.2^2 ……… 6^2

3. Indicar para qué valores de x tienen significado las siguientes expresiones en el conjunto de los números reales.

a) $\frac{8}{x}$

b) $\frac{4}{x+2}$

c) $\frac{0}{x-1}$

d) $\frac{x}{3+2}$

e) $\frac{4}{x^2}$

f) $\frac{-6}{(x-3)(x+3)}$

g) $\frac{3}{x^2+3}$

h) $\frac{8}{x^2-9}$

i) $\sqrt{x-5}$

j) $\frac{2}{\sqrt{x}}$

k) $\frac{1}{x^3}$

l) $\frac{5}{x^3-1}$

m) $\sqrt[3]{x+5}$

n) $\frac{6}{\sqrt[3]{x-3}}$

4. Resolver las siguientes operaciones e indicar el conjunto al que pertenece el resultado.

a) $\left[4^3-5(8+2)\right]:7=$

b) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=$

c) $4+\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=$

d) $\sqrt{1+\frac{9}{16}}$

e) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{4}{5}}:\left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{5}}=$

f) $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}}.\left(\frac{9}{16}\right)^{-1}.\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{4}}=$

g) $\frac{11\bullet(-3)^2+5^0}{7^2+1}+1^3-3=$

h) $\frac{-\frac{1}{5}+\left[\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right]}{-3}$

i) $-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}}{2-\frac{1}{2}}\right)$

j) $\sqrt{\frac{5}{4}+1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{0}:2=$

k)

$\sqrt{2^2.3^2}-\left(\frac{3}{5}\right)^{-7}.\left(\frac{3}{5}\right)^{5}.\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}+\left(3-\frac{1}{2}\div\frac{1}{6}\right)$

l) $\left[-\frac{1}{3}.\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}+\frac{1}{3}\right]:\left[\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]+1=$

m)

$\left(\frac{1}{4}-1\right)^{2}+\sqrt[3]{-1+\frac{7}{8}}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}.\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}=$

n) $\sqrt{(-1)\left(\frac{3}{4}-1\right)}+(-2).(2)^{-2}+\left(1-\frac{1}{2}:2\right)=$

5. Resolver:

a) $y^{\frac{1}{2}}\ .\ y^{\frac{3}{4}}.y^{\frac{2}{3}}=$

b) $\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}x\right).3x=$

c) $\frac{3.2^n-4.2^n}{2^n+2.2^{n-1}}$

d) $\frac{2^{n+1}}{\left(2^n\right)^n.2^{-1}}:\frac{2.2^{n+1}}{\left(2^{n-1}\right)^{n+1}}$

e) $\sqrt[3]{3x^3-4x^3+\frac{7}{8}x^3}=$

f) $\frac{\left(x^2\right)^3.y^2.y^3.z^0}{\sqrt[3]{x^3}.y^4}=$

6. Verificar las siguientes igualdades.

a) $3^n-1+2.3^n=3^{n+1}-1$

b) $\frac{3.(n+1)}{6}-\frac{n+1}{3}=\frac{n+1}{6}$

c) $4^n-1+3.4^n=4^{n+1}-1$

<u>LA FRACCIÓN COMO EXPRESIÓN DE PORCENTAJES</u>

Tomar un porcentaje de una cantidad significa tomar una fracción de esa cantidad.

El porcentaje indica cuántas partes tomamos si consideramos que el total está dividido en 100 partes iguales.

Ejemplo 1: Lucas gasta el 35% de su sueldo en pagar el alquiler de su casa.

Es decir que si dividimos su sueldo en ……….. partes iguales, ………… de esas partes representan lo que gasta en alquiler.

Y a esto lo podemos expresar como:

$$\boxed{35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35}$$

Ejemplo 2: En 2º año hay 25 alumnos y el 40 % de ellos practica natación.

Para saber cuántos alumnos practican natación hacemos así: 40% de $25 = \frac{40}{100} \cdot 25 = \ldots$

ACTIVIDADES

1: Completar el cuadro:

PORCENTAJE	FRACCIÓN DECIMAL	NÚMERO DECIMAL
48%		
	$\frac{25}{100}$	
		0,09

2: Calcular

a) El 5% de 625 gramos:

b) El 36% de 450 alumnos:

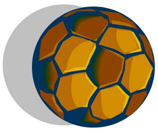
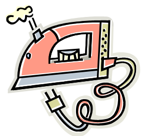
3: Resolver los siguientes problemas:

a) En la tabla figuran las calificaciones obtenidas por los alumnos de 2º año en la última prueba de Historia, complétala y calcula el porcentaje total de aprobados.

Calificaciones	**1,2 y 3**	**4 y 5**	**6**	**7 y 8**	**9 y 10**	**Total**
Cantidad						**25**
Porcentaje	**4%**	**8%**	**36%**	**28%**	**24%**	

b) El examen que rindió Florencia tenía 125 preguntas y ella contestó bien el 64%. ¿Cuántas preguntas contestó bien? ¿Cuántas preguntas deberían haber contestado bien para lograr el 80% de aciertos?

c) En la siguiente tabla hay una serie de ofertas, algunas son verdaderas y otras falsas. Calcular el porcentaje y detectar los errores:

Oferta	Cálculos
a- Fútbol 25% descuento.  **Antes: $59 Ahora: $ 44,30**	
b - Plancha a vapor: 20 % Descuento.  **Antes: $358 Ahora: $286,40**	
c- Reloj despertador: 5% descuento  **Antes: $12,20 Ahora: $11,59**	

ORDEN EN EL CONJUNTO R

R es un conjunto ordenado. Esto es, dados dos números reales a y b vale una y solo una de las siguientes afirmaciones

$$\mathbf{a < b, \quad a > b \quad o \quad a = b}$$

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD EN R

1) Si sumamos o multiplicamos a ambos miembros de una igualdad una misma constante se obtiene otra igualdad:

Si a = b, entonces a + c = b + c

Si a = b, entonces a.c = b.c

2) Si sumamos o multiplicamos miembro a miembro dos igualdades se obtiene otra igualdad

Si a = b y c = d, entonces a + c = b + d

PROPIEDADES DE LA DESIGUALDAD

1) Si a ambos miembros de una desigualdad se suma una misma constante, la desigualdad se mantiene***:***

Si a < b, entonces a+c < b+c

2) Si a ambos miembros de una desigualdad se multiplica por una misma constante positiva la desigualdad se mantiene

Si a < b y c > 0, entonces a.c < b.c

3) Si a ambos miembros de una desigualdad se multiplica por una misma constante negativa la desigualdad cambia de sentido

Si a < b y c < 0, entonces a.c > b.c

SUBCONJUNTOS DE LOS NÚMEROS REALES: INTERVALOS

A menudo se trabaja con subconjuntos de números reales que representan semirrectas o segmentos de recta. Dichos subconjuntos reciben el nombre de Intervalos.

Un **intervalo** es un conjunto infinito de números reales comprendidos entre dos valores fijos que se denominan **extremos del intervalo**.

TIPOS DE INTERVALOS

- **Intervalo Abierto** (a, b) es el conjunto de los números reales mayores que a y menores que b con a < b, donde **a** y **b** son los extremos que **No** pertenecen al intervalo.

  Se escribe: $(a, b) = \{ x \in R \ / \ a < x < b\}$

- **Intervalo Cerrado** [a, b] es el conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b con a < b, donde **a** y **b** son los extremos que **Sí** pertenecen al intervalo.

  Se escribe: $[a, b] = \{ x \in R \ / \ a \leq x \leq b\}$

Se pueden realizar las combinaciones con los extremos llamándolos:

- **Intervalos semiabiertos** cuando son de la forma:

$(a, b] = \{ x \in R \ / \ a < x \leq b\}$

$[a, b) = \{ x \in R \ / \ a \leq x < b\}$

- **Intervalos Infinitos:** Se presentan las siguientes posibilidades

a) $(-\infty, b)$ conjunto de los números reales menores que b.

$(-\infty, b) = \{x \in R \ / \ x < b\}$

b) $(-\infty, b]$ conjunto de los números reales menores o iguales que b.

$(-\infty, b] = \{x \in R \ / \ x \leq b\}$

c) $(a, +\infty)$ conjunto de los números reales mayores que a.

$(a, +\infty) = \{x \in R \,/\, x > a\}$

d) $[a, +\infty)$ conjunto de los números reales mayores o iguales que a.

$[a, +\infty) = \{x \in R \,/\, x \geq a\}$

En resumen se presenta la siguiente tabla:

Denominación	**Notación de Intervalos**	**Notación como subconjunto de los reales**	**Forma gráfica**
Intervalo abierto	(a, b)	$\{x \in R \,/\, a < x < b\}$	
Intervalo cerrado	[a, b]	$\{x \in R \,/\, a \leq x \leq b\}$	
Intervalos semiabiertos	(a, b] [a, b)	$\{x \in R \,/\, a < x \leq b\}$ $\{x \in R \,/\, a \leq x < b\}$	 
Intervalos infinitos	$(-\infty, b)$ $(-\infty, b]$ (a, ∞) $[a, \infty)$	$\{x \in R \,/\, x < b\}$ $\{x \in R \,/\, x \leq b\}$ $\{x \in R \,/\, x > a\}$ $\{x \in R \,/\, x \geq a\}$	   

Observaciones:

- ❖ Los símbolos ∞ y $-\infty$ se leen "infinito positivo" e "infinito negativo" respectivamente.

- Los intervalos no se expresan por extensión
- Los intervalos no se representan gráficamente mediante diagramas de Venn.
- Los intervalos se representan gráficamente en la recta real.

ACTIVIDADES

1. Definir por extensión o intervalo según corresponda, los siguientes conjuntos:

a) $A = \{ x / x \in Z \text{ y } x \leq 12 \}$

b) $B = \{ x / x \in R \text{ y } x \leq 12 \}$

c) $C = \{ x / x \in N \text{ y } -4 < x < 6 \}$

d) $D = \{ x / x \in Z \text{ y } -4 < x < 6 \}$

e) $E = \{ x / x \in R \text{ y } -4 < x < 6 \}$

g) $G = \{x / x \in Z \text{ y } (x - 1).(x + 2) = 0\}$

h) $H = \{x / x \in N \text{ y } (x - 1).(x + 2) = 0\}$

i) $I = \{ x / x \in N \text{ y } (x + 1).(x -3) = 0\}$

j) $J = \{ x / x \in Z \text{ y } (x + 1).(x -3) = 0\}$

k) $K = \{ x / x \in R \text{ y } (x + 1).(x -3) = 0\}$

2. Representar los siguientes intervalos en la recta numérica:

a) $(4, +\infty)$

b) $(6, 10]$

c) $(-2, 5)$

d) $[-3, 0]$

e) $(-\infty , -2]$

f) $[-2, 5)$

3. Expresar los siguientes conjuntos como intervalos y representarlos en la recta numérica:

a) $A = \{ x / x \in R \text{ y } -1 < x \leq 12 \}$

b) $B = \{ x / x \in R \text{ y } 4 < x \}$

c) $C = \{ x / x \in R \text{ y } x \geq -4 \}$

OPERACIONES CON INTERVALOS

Los intervalos son subconjuntos de números reales y las operaciones que se pueden realizar entre ellos son las operaciones propias entre conjuntos: unión, intersección, diferencia y complemento.

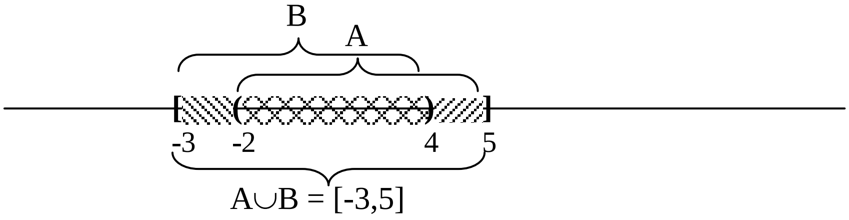
Se opera entre ellos gráficamente y posteriormente se expresa simbólicamente el conjunto obtenido.

- **UNIÓN DE INTERVALOS: $A \cup B$**

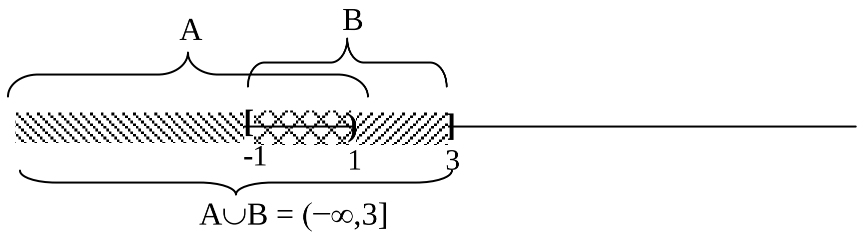
Se representan gráficamente ambos conjuntos en la recta numérica y la unión de intervalos es la sección de la recta numérica que se encuentra rayada.

Ejemplos:

a) $A = (-2,5]$ y $B = [-3,4)$



b) A = (−∞,1) y B = [-1,3]

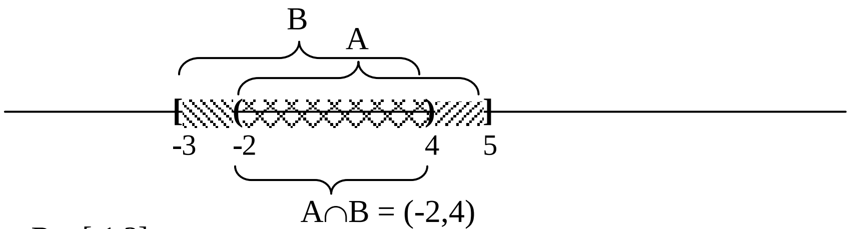


❖ **<u>INTERSECCIÓN DE INTERVALOS</u>: A∩B**

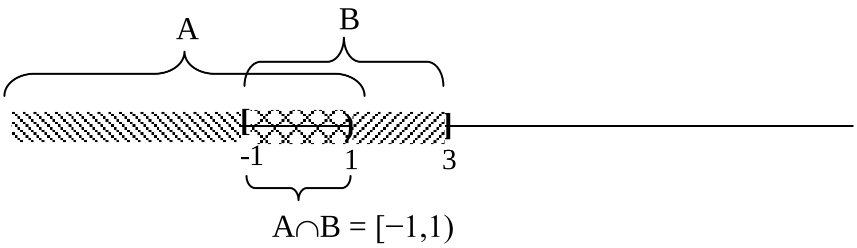
Se representan gráficamente ambos conjuntos en la recta numérica y la intersección de intervalos es la sección de la recta numérica común a ambos, que se encuentra doblemente rayada.

Ejemplos:

a) A = (−2,5] y B = [-3,4)



b) A = (−∞,1) y B = [-1,3]

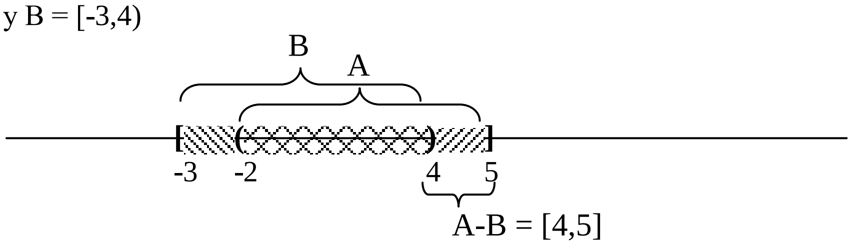


❖ **<u>DIFERENCIA ENTRE INTERVALOS</u>: A− B**

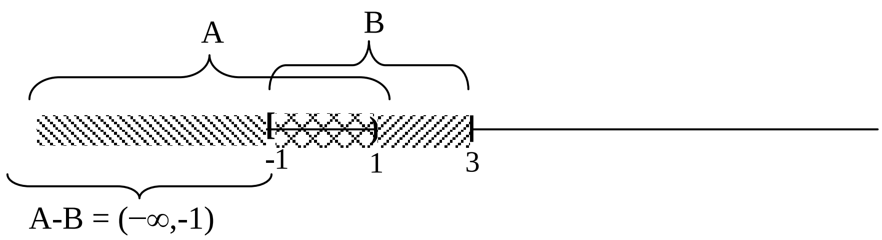
Se representa gráficamente el conjunto A en la recta numérica, luego se le quita lo rayado por el conjunto B.

Ejemplos:

a) A = (−2,5] y B = [-3,4)



b) A = (−∞,1) y B = [-1,3]

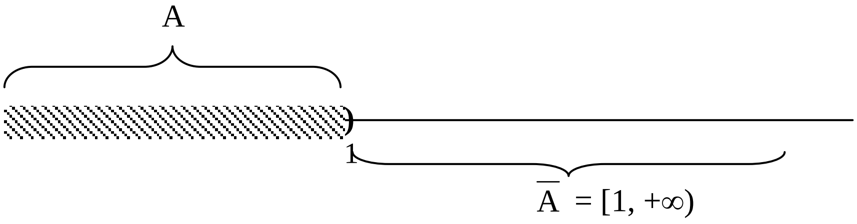


❖ COMPLEMENTO DE UN INTERVALO

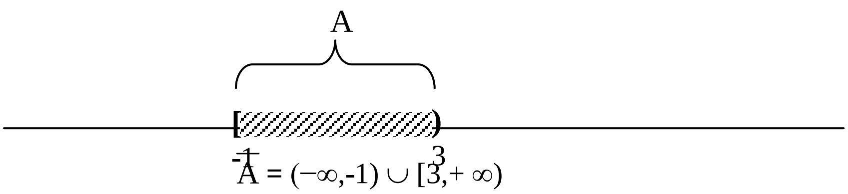
Se representa gráficamente el conjunto A en la recta numérica, luego el complemento de A es la sección de la recta numérica sin sombrear.

Ejemplos:

a) A = $(-\infty,1)$



b) A = [-1,3)



ACTIVIDAD

Calcular A∪B, A∩B, A−B y $\overline{A}$

a) A = [3 , 5) ; B = [1 , 4]

b) A = (–2, 5) ; B = (–4 , 2]

c) A = ($-\infty$, 4) ; B = [–3 , –1]

d) A **=** (–2 , 7) ; B = [7 , 9)

e) A **=** (3 , 6) ; B = (4 , $+\infty$)

f) A = (–3, $+\infty$) ; B = ($-\infty$, –1]

EJERCICIOS PRÁCTICOS

Ejercicio 1: Revisa los conceptos presentados en el material teórico-práctico de la UNIDAD 1 y responde:

a) ¿Cuáles son las formas de definir un conjunto? Ejemplos

b) ¿Cómo se representa que un elemento pertenece o no pertenece a un conjunto? Indica con ejemplos en forma analítica y gráfica.

c) Ejemplifica a través de conjuntos numéricos, la relación de inclusión entre conjuntos.

Ejercicio 2: Escribe cómo se lee cuando expresamos un conjunto por comprensión:

a) A= {x / x sea una vocal} ……………………..………………

b) B= {x ∈ N / x ≤ 4} ………………………………………………

Ejercicio 3: Considera el conjunto A = {r, s, m, e}. Razona la veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) $c \in A$,

b) $\{r, c, m\} \subset A$,

c) $\{m\} \subset A$,

d) $\{e, m, r\} \subset A$

e) $\{s, e\} \in A$

f) $\{s, e\} \subset A$

Ejercicio 4: Escribe simbólicamente las afirmaciones siguientes:

a) v pertenece al conjunto M

b) El conjunto T contiene como subconjunto al conjunto H

c) Entre los elementos del conjunto G no está el número 2

d) El conjunto Z no es un subconjunto del conjunto A

e) El conjunto X no contiene al conjunto K

f) El conjunto H es un subconjunto del conjunto K

Ejercicio 5: Sean A, B y H subconjuntos de un conjunto U. Se sabe que $A \subset H$, $B \subset H$ y $H \subset A \cup B$. ¿Qué se puede decir del conjunto H?

Ejercicio 6: Si el conjunto A tiene 5 elementos, el conjunto B tiene 3 elementos, y además se sabe que $A \cap B$ tiene 2 elementos entonces, ¿cuál es la cardinalidad de $A \cup B$?

Ejercicio 7: Dados los conjuntos $A = \{ 2,4,6,7,8 \}$ $B = \{ x \in N \ / \ x \text{ es par y } x < 10 \}$ ¿Cuáles de las siguientes alternativas es la correcta ?

a) $A = B$

b) $A \subseteq B$

c) $B \subseteq A$

d) $A \cup B = \{ 2,4,6,8,10 \}$

e) $A \cap B = \{ 7 \}$

f) $A - B = \{ 7 \}$

Ejercicio 8: ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos, unitarios, finitos o infinitos?

a) A = { x / x es día de la semana}

b) B = { vocales de la palabra vals}

c) $C = \{ 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$

d) D = { x / x es un habitante de la luna}

e) $E = \{ x \in \mathbb{N} \ / \ x < 15\}$

f) $F = \{ x \in \mathbb{N} \ / \ 5 < x < 5 \}$

g) G = { x∈ℕ / x > 15}

h) H = { x∈ℕ / 3x = 6}

i) I = { x / x es presidente del Mar Mediterráneo}

Ejercicio 9: Definir por extensión o por comprensión los siguientes conjuntos:

a) El conjunto de los números naturales impares menores de 11.

b) El conjunto de los números naturales pares mayor que 10 y menor que 20.

c) A = $\{ x / x \in N \ \ y \ \ 0 \le x \le 12 \}$

d) B = $\{ x / x \in Z \ \ y \ \ 0 \le x \le 12 \}$

e) C = $\{ x / x \in R \ \ y \ \ x^2 - 4 = 0 \}$

f) D = $\{ x / x \in N \ \ y \ \ x^2 - 4 = 0 \}$

g) E = $\{ x / x \in Z \ \ y \ \ x^2 - 4 = 0 \}$

Ejercicio 10: Aplicar propiedades adecuadas para resolver las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{4} + 2\sqrt{9} =$

b) $\sqrt{5^2 - 3^2} - (7-9)^3 - \left\{\left[(-5)^3\right]^{-1}\right\}^0 =$

c) $\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{6} + 1{,}2\sqrt{24:(-2)^2} =$

d) $2^3 - \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2(5-10)\right] + \sqrt{2.8} =$

e) $\dfrac{3+\frac{1}{5}}{2+\frac{2}{5}} - \dfrac{3-\frac{2}{3}}{\left(2-\frac{1}{3}\right).7} =$

f) $\dfrac{\left(\sqrt{0{,}09} + \frac{1}{2} + 0{,}7\right)^2 - \left(0{,}7 - \frac{1}{5}\right)^2}{\frac{3}{2} - \sqrt{0{,}25}} =$

Ejercicio 11: Reducir las siguientes expresiones:

a) $-2ab - ba =$

b) $(-ab)^2 - (ba)^2 =$

c) $(xy - yx)\dfrac{\sqrt{4x^3y^3}}{\sqrt{xy^5}} =$

e) $\sqrt[3]{m^4.\sqrt{\dfrac{m^4}{y^6}}}$

f) $x(-y)(-z)^2(-yx) + (3zyx)^2 + 3(-y)(-2z)^2(-x)(-yx) =$

g) $\dfrac{z^{-3}.a^5.b^{3/2}}{a^{-1}.z^{-7}.b^0} =$

h) $= \left(\dfrac{x-3y}{5}\right)^0 \dfrac{\sqrt[3]{x^3 27y^6}}{\sqrt[6]{y^3x^6}} =$

i) $\dfrac{4^0.\left(5^{1/2}\right)^{2/3}\left(2^{-3}\right)^2}{5^3.\left(2^{10}\right)^{-1/2}.2^2} =$

Ejercicio 12: Dados los conjuntos U = N, A = {1, 2, 3, 5}, B = {x ∈ N / (x - 5).(x + 3) = 0},

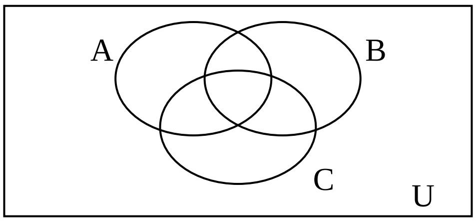
C = {x ∈ N / x ≤ 4} y D = {x ∈ N / x es par menor que 10}, se pide:

a) Definir por extensión los conjuntos B, C y D.

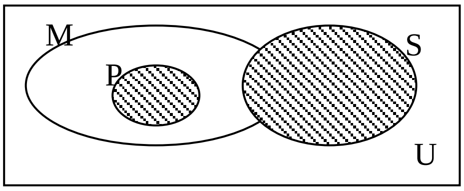
b) Calcular: $A \cap B$; $C \cap D$; $B \cup C$; $A \cup B$; $\overline{C}$; $A - B$; $B - A$; $B - D$; $A \cup B \cup \overline{C}$; $\overline{C} \cup (B - D)$

Ejercicio 13: Sombrear el área correspondiente a la operación indicada.

a) $(A \cup B) - C$	**b)** $\overline{A \cup B \cup C}$



Ejercicio 14: Determinar el conjunto sombreado.



Ejercicio 15: Expresar la notación de los siguientes intervalos:

a)

b)

c)

Ejercicio 16: Resolver analítica y gráficamente:

a) $[1,3) \cup (2,3] =$

b) $[6,8) \cap [7,9) =$

c) $[4,9] \cap (7,8) =$

e) $\overline{(-3,5] \cap (2,3)} =$

f) $(-\infty,1) - (0,+\infty) =$

g) $(2,3] - \overline{(-\infty,1)} =$