UNIDAD N° 4: TRIGONOMETRÍA

ÍNDICE GENERAL DE LA UNIDAD

ÍNDICE REDUCIDO DE TEMAS DE LA UNIDAD

ESTA UNIDAD CONTIENE LOS SIGUIENTES TEMAS:

- **TRIGONOMETRÍA**
- **SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR**
- **RAZONES TRIGONOMÉTRICAS**
- **RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS**
- **RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS**

CONSEJOS A TENER EN CUENTA ANTES DE EMPEZAR:

- ✓ ***LEER CON MUCHA ATENCIÓN LOS CONTENIDOS.***
- ✓ ***PONER ÉNFASIS EN LOS EJEMPLOS.***
- ✓ ***RESOLVER MINUCIOSAMENTE LOS EJERCICIOS.***
- ✓ ***CONSULTAR LAS DUDAS QUE PUEDAN SURGIR.***

TRIGONOMETRÍA

Es la rama de la matemática que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de triángulos, las propiedades y aplicaciones de las funciones trigonométricas de ángulos. Las dos líneas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se ocupa de triángulos que forman parte de la superficie de una esfera.

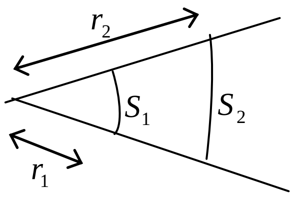
SISTEMA DE MEDICIÓN ANGULAR

Para expresar la medida de un ángulo, se pueden utilizar los siguientes sistemas:

- **Sistema sexagesimal:** su unidad de medida es el "grado sexagesimal"; donde un grado sexagesimal (simbólicamente 1º) representa la noventa-ava parte de un ángulo recto.

$$1^{\circ} = \frac{\text{ángulo recto}}{90} \Rightarrow 90^{\circ} = \text{ángulo recto}$$

- **Sistema Radial:** Para definir la unidad de medida de este sistema, analicemos previamente: Sea un ángulo cualquiera, con centro en el vértice del ángulo y radios r_1 y r_2, si se trazan arcos de circunferencias de longitudes S_1, S_2; se obtiene la siguiente figura:



Se verifica que:

$$\frac{S_1}{r_1} = \frac{S_2}{r_2} = a \;\; ; \quad \text{con } a = \text{cte}$$

Para cualquier radio *r*, y la correspondiente longitud de arco *S*, se verifica:

$$\frac{S}{r} = a \Rightarrow S = a \bullet r$$

La constante "a" es característica del ángulo en cuestión y determina el valor del ángulo. Se dirá que el ángulo se mide en "radianes".

Un **radián** es la medida del ángulo cuyo arco es igual al radio de la circunferencia, en la que está centrado.

Nota: Sabiendo que el ángulo central positivo de un giro es $\alpha = 360^{\circ}$ y recordando que la longitud de la circunferencia es $2.\ \pi .r$, un ángulo central verifica:

$$\alpha = 360^{\circ} = \frac{S}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Por lo tanto: **360º = 2 π radianes**

Ejemplos:

a) Determinar los radianes que representan 35º.

$$360º \text{———} 2\pi \text{ rad}$$
$$35º \text{———} x \text{ rad} \Rightarrow x = \frac{35º \cdot 2\pi \text{ rad}}{360º} = \frac{7}{36}\pi \text{ rad}$$

b) Determinar los grados sexagesimales que representan 3π rad.

$$2\pi \text{ rad} \qquad 360º$$
$$3\pi \text{ rad} \qquad x \Rightarrow x = \frac{3\pi \text{ rad} \bullet 360º}{2\pi \text{ rad}}; \text{ luego } \quad x = 540º$$

TABLA DE CONVERSIÓN ENTRE LOS SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

Ángulo en Grados	Ángulo en Radianes
0	0
30	$\frac{\pi}{6}$
45	$\frac{\pi}{4}$
60	$\frac{\pi}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$
180	π
270	$\frac{3}{2}\pi$
360	2π

ACTIVIDADES

1. Calcular la medida de los siguientes ángulos en radianes:

a) â = 18º **b)** α = 78º

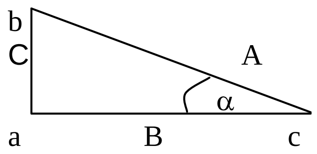
2. Calcular la medida de los siguientes ángulos en grados:

a) ê = $\frac{3}{7}\pi$ **b)** α = 3 rad

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Se llaman **razones trigonométricas** a las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Son seis y reciben el nombre de seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Considerando el ángulo α se pueden definir las seis razones de la siguiente forma:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cat op}}{\text{hip}} = \frac{C}{A}$$

$$\sec\,\alpha = \frac{\text{hip}}{\text{cat ady}} = \frac{A}{B}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cat ady}}{\text{hip}} = \frac{B}{A}$$

$$\operatorname{cosec}\,\alpha = \frac{\text{hip}}{\text{cat op}} = \frac{A}{C}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cat op}}{\text{cat ady}} = \frac{C}{B}$$

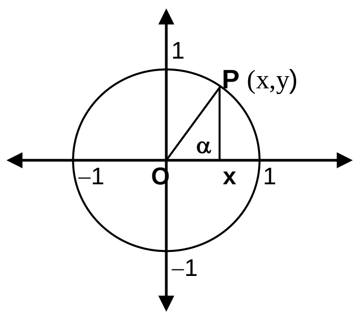
$$\operatorname{cotg}\,\alpha = \frac{\text{cat ady}}{\text{cat op}} = \frac{B}{C}$$

De las definiciones anteriores se deduce que

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\ ;\ \operatorname{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\ ;\ \sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\,\alpha}\ ;\ \operatorname{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\,\alpha}}$$

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

Recibe el nombre de **circunferencia trigonométrica** la circunferencia de centro en el origen de coordenadas cartesianas (0,0) y de radio r = 1.



Al considerar un punto P(x,y) perteneciente a la circunferencia trigonométrica y unir el punto P con el origen de coordenadas se obtiene el segmento $\overline{OP}$ = r = 1 (radio de la circunferencia), que coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo OPX.

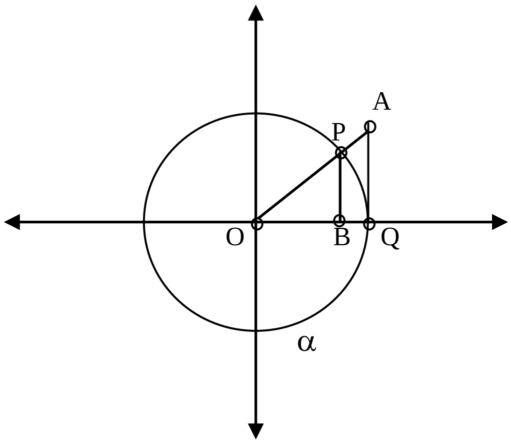
Observando el gráfico es claro que:

$\overline{OP}$ = r = **hipotenusa**

$\overline{OX}$ = x (abscisa del punto P) = **cateto adyacente** del ángulo α (en el triángulo OPX)

$\overline{PX}$ = y (ordenada del punto P) = **cateto opuesto** del ángulo α (en el triángulo OPX)

Las razones trigonométricas tienen una **representación segmentaria** en la circunferencia trigonométrica, que para ángulos del primer cuadrante es:

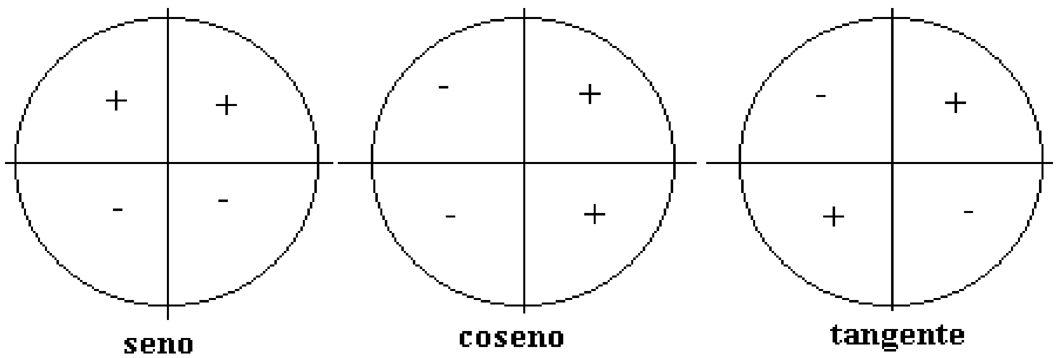


$\overline{OB}$ **= x**: representa el **cos** α

$\overline{PB}$ **= y**: representa el **sen** α

$\overline{QA}$: representa la **tg** α

Nota: Las razones presentan los siguientes signos de acuerdo a cada cuadrante, dependiendo del signo de las abscisas y ordenadas:



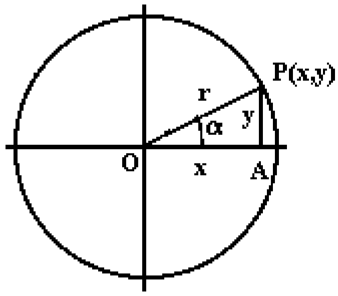
ACTIVIDAD

Completar el siguiente cuadro con el signo correspondiente.

α	sen α	cos α	tg α	cotg α	cosec α	sec α
1º Cuadrante						
2º Cuadrante						
3º Cuadrante						
4º Cuadrante						

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

❖ **Teorema fundamental.**



$\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{y}{r}$ de donde $y = r \text{ sen } \alpha$

$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{x}{r}$ de donde $x = r \cos \alpha$

Además, según Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

luego tenemos que:

$$r^2\cos^2\alpha + r^2\text{sen}^2\alpha = r^2$$

de donde resulta **la expresión:**

$$\boxed{\mathbf{sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1}}$$

♦ ***Dividiendo en la expresión del recuadro por $\text{sen}^2\alpha$:***

$$1 + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{1 + cotg^2\,\alpha = cosec^2\,\alpha}}$$

♦ ***Dividiendo en la expresión del recuadro por $\cos^2\alpha$:***

$$\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\mathbf{tg^2\,\alpha + 1 = sec^2\,\alpha}}$$

- **Ángulos opuestos: Si $\beta = -\alpha$**

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{y'}{r} = \frac{-y}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen } \beta = -\text{ sen } \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\cos \beta = \frac{x}{r} \qquad \Rightarrow \cos \beta = \cos \alpha$$

ACTIVIDAD

1. **Completar el cuadro conociendo los valores de algunas relaciones trigonométricas.**

α	**0º**	**30º**	**45º**	**60º**	**90º**
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α					
cotg α					
sec α					
cosec α					

2. **Calcular sen α y tg α , usando la Relación Fundamental, sabiendo que cos α = $-\frac{3}{5}$ y α es un ángulo del segundo cuadrante.**

3. **Calcular cos α y cotg α , usando la Relación Fundamental, sabiendo que sen α = $\frac{1}{2}$ y α es un ángulo del segundo cuadrante.**

INVERSAS DE RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Puede observarse la siguiente situación:

Para el ángulo α de 30º; o sea para el arco $\frac{\pi}{6}$, le corresponde el valor de la función seno igual a 0,5; es decir: 0,5 = sen $\frac{\pi}{6}$.

Esta "relación" implica que $\frac{\pi}{6}$ es el "arco cuyo seno" es 0,5.

Simbólicamente, se puede expresar lo siguiente:

Si "y" es el seno de "x", esto implica que "x" es el "arco cuyo seno" es "y".

$$y = \text{sen } x \Rightarrow x = \text{arco sen } y$$

La relación "arco seno" es la inversa del seno.

Análogamente:

$$y = \cos x \Rightarrow x = \text{arco coseno } y$$
$$y = \text{tg} x \Rightarrow x = \text{arco tg } y$$

Tener en cuenta el siguiente cuadro, que ayudará para ubicar el ángulo en el cuadrante correspondiente, conociendo la relación trigonométrica.

Valor de la Relación Trigonométrica	**Ángulo agudo dado por la calculadora**
Seno – Positivo	α , $(180º - \alpha)$
Seno – Negativo	$(\alpha + 360º)$, $(\lvert\alpha\rvert + 180º)$
Coseno – Positivo	α , $(360º - \alpha)$
Coseno – Negativo	α , $(360º - \alpha)$
Tangente – Positivo	α , $(\alpha + 180º)$
Tangente – Negativa	$(\alpha + 360º)$, $(180º + \alpha)$

Ejemplos:

a) sen α = 0,5 → α = 30º (valor de calculadora)

→ 180º - α = 150º

b) sen α = -0,5 $\longrightarrow$ α = -30º (valor de calculadora)

$\searrow$ Rtas: -30º + 360º = 330º

$|-30º|$ + 180º = 210º

c) cos α = 0,5 $\longrightarrow$ α = 60º (valor de calculadora)

$\searrow$ 360º - α = 300º

d) tg α = 1 $\longrightarrow$ α = 45º (valor de calculadora)

$\searrow$ α + 180º = 45º + 180º = 225º

e) tg α = -1 $\longrightarrow$ α = -45º (valor de calculadora)

$\searrow$ 360º + α = 315º

180º + α = 135º

ACTIVIDADES

1. Haciendo uso de la calculadora, obtener el valor de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen 100º =

b) cos 0,5 =

c) tg 20º 10’ 3’’ =

d) cotg 2,6º =

e) cotg 2,6 =

f) sec 20,1 =

g) cosec 142º 15’’ =

2. Si tg α = 2,5 y α está en el primer cuadrante. ¿Cuánto mide α en radianes?

3. Si sen â = 0,5 y â pertenece al II cuadrante; ¿Cuánto mide â en sexagesimal?

4. Calcular las demás razones trigonométricas de α sabiendo que sen α = $\frac{4}{5}$ **y α es un ángulo del segundo cuadrante.**

5. Calcular las demás razones trigonométricas de α sabiendo que cos α = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **y α está en el tercer cuadrante.**

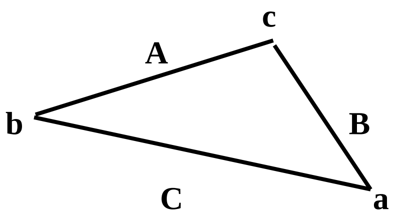
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Un triángulo es **oblicuángulo** cuando ninguno de sus ángulos interiores es recto.

- **Teorema del seno**

"En todo triángulo oblicuángulo sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos".

$$\frac{C}{\operatorname{sen}\hat{c}} = \frac{B}{\operatorname{sen}\hat{b}} = \frac{A}{\operatorname{sen}\hat{a}}$$



- **Teorema del coseno**

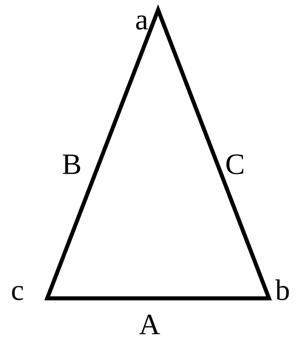
"El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman".

Según los datos del problema, el teorema se puede aplicar de las formas siguientes:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2\,B.\,C\,.\cos\hat{a}$$

$$B^2 = A^2 + C^2 - 2\,A\,.\,C\,.\cos\hat{b}$$

$$C^2 = B^2 + A^2 - 2\,B\,.\,A\,.\cos\hat{c}$$



ACTIVIDADES

1. Sea abc un triángulo rectángulo en â, el segmento $\overline{ab}$ mide 20 cm. y el ángulo $\hat{c}$, opuesto a ese lado, mide 42º. Calcular:

a) el lado $\overline{ac}$ **b)** el lado $\overline{bc}$ **c)** el ángulo $\hat{b}$

2. Sea abc un triángulo rectángulo en â, los segmentos $\overline{ab}$ y $\overline{ac}$ miden 2 m y 4 m, respectivamente. Calcular:

a) el lado $\overline{bc}$ **b)** el ángulo $\hat{b}$ **c)** el ángulo $\hat{c}$

3. Dos lados adyacentes de un paralelogramo se cortan en un ángulo de 36º y tienen longitudes de 3 y 8 cm. Determina la longitud de la diagonal menor.

4. Un carpintero debe hacer una mesa triangular de tal forma que un lado mida 2 m, otro 1,5 m y el ángulo opuesto al primer lado debe ser 40º. ¿Lo conseguirá?

5. Un edificio proyecta una sombra de 150m cuando el rayo solar forma un ángulo de 20º 30' sobre el suelo, calcular la altura del edificio.

EJERCICIOS PRÁCTICOS

Ejercicio 1: Transformar el ángulo de grados a radianes:

a) 25º **b)** 35º **c)** 80º **d)** 150º **e)** 200º

f) 92º **g)** 64º **h)** 258º **i)** 315º

Ejercicio 2: Transformar el ángulo de radianes a grados:

a) $\frac{\pi}{5} rad$ **b)** $\frac{\pi}{10} rad$ **c)** $3\pi \; rad$ **d)** $\frac{17\pi}{4} rad$

Ejercicio 3: Dos de los ángulos interiores de un triángulo miden 60º y π/4 radianes. Calcular la medida del tercer ángulo interior en grados sexagesimales y en radianes.

Ejercicio 4: Utilizar una calculadora y encontrar las relaciones trigonométricas de los ángulos: 0º, 25º,45º,70º y 85º. ¿Entre qué valores varía el seno y el coseno?

Ejercicio 5: Algunos valores de las relaciones trigonométricas pueden calcularse directamente sin usar calculadora. Calcular según la figura y luego comprobar con la calculadora.

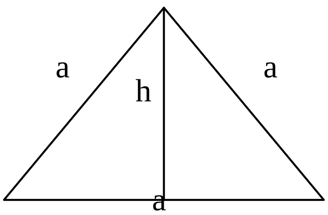
a) sen 30º

b) cos 30º

c) sen 60º

d) cos 60º

e) ¿Es necesario conocer las medidas del triángulo?



Ejercicio 6: Si se sabe que $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$. Obtener, sin usar calculadora, los valores de la tangente para los ángulos dados en el ejercicio anterior.

Ejercicio 7: ¿Qué signo tienen sen ϕ y cos ϕ en los siguientes ángulos?

a) ϕ = 200º **b)** ϕ = 98º **c)** ϕ = 75º **d)** ϕ = 300º **e)** ϕ = 185º.

Ejercicio 8: Determinar, en cada caso, el cuadrante en que se encuentra el ángulo θ

a) *sen* $\theta < 0$ y *cos* $\theta > 0$

b) *sen* $\theta > 0$ y *cos* $\theta < 0$

c) *sen* $\theta < 0$ y *cos* $\theta < 0$

d) *sen* $\theta > 0$ y *cos* $\theta > 0$

Ejercicio 9: a) Sea γ un ángulo del cuarto cuadrante tal que *cos* $\gamma = 4/5$. Hallar *sen* γ y *tan* γ

b) Sea ω un ángulo del segundo cuadrante tal que *sen* $\omega = 3/4$. Hallar *cos* ω y *tan* ω

c) Sea ψ un ángulo del tercer cuadrante tal que *cos* $\psi = -4/5$. Hallar *sen* ψ y *tan* ψ

Ejercicio 10: Calcular *sen* θ y *cos* θ en los siguientes casos:

a) *tan* $\theta = -2$ y θ está en el segundo cuadrante

b) *tan* $\theta = 4$ y θ está en el tercer cuadrante

c) *tan* $\theta = -2$ y θ está en el cuarto cuadrante

Ejercicio 11: Determinar ξ sabiendo que:

a) *sen* $\xi = 0{,}69465$ y ξ está en el segundo cuadrante

b) *tan* $\xi = -1{,}42814$ y ξ está en el segundo cuadrante

c) *cos* $\xi = -0{,}65606$ y ξ está en el tercer cuadrante

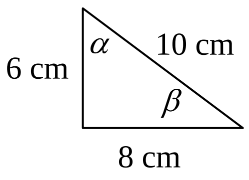
d) *tan* $\xi = -2$ y ξ está en el cuarto cuadrante

e) *sen* $\xi = -1/3$ y ξ está en el tercer cuadrante

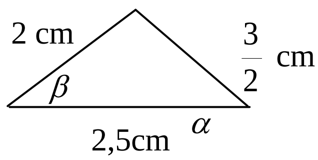
f) *cos* $\xi = 0{,}65987$ y ξ está en el cuarto cuadrante

Ejercicio 12: En los siguientes triángulos rectángulos, calcular: seno, coseno y tangente de α y β.

a)



b)

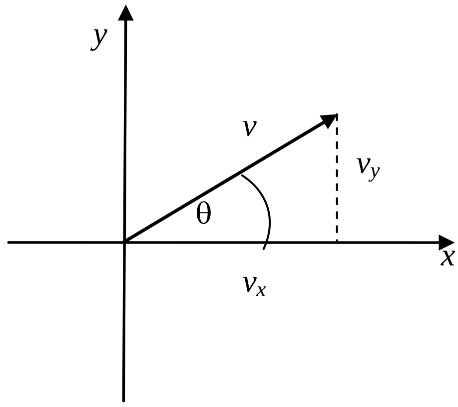


Ejercicio 13:

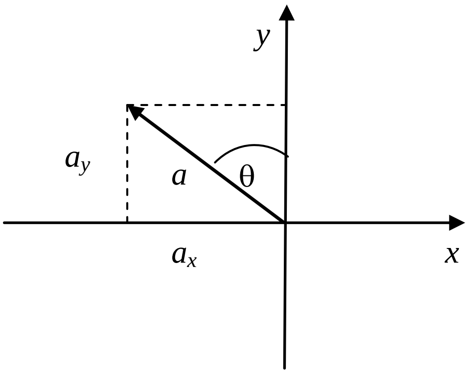
a) Encontrar los ángulos de un triángulo rectángulo sabiendo que los catetos miden 20cm y 35 cm.

b) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20cm y uno de los catetos 15cm. Hallar los ángulos.

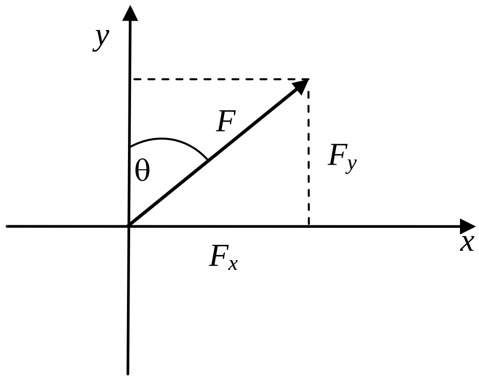
Ejercicio 14: En la siguiente figura $v = 40\ m/s$ y θ = 30 º. Calcular v_x y v_y



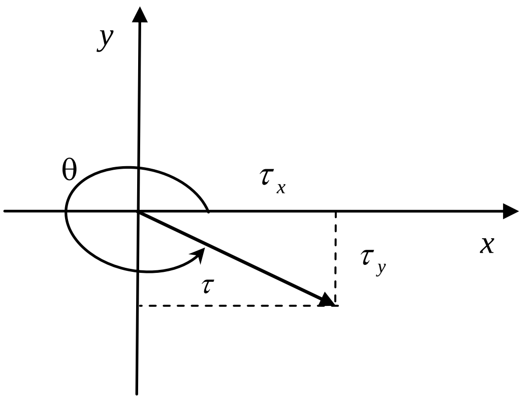
Ejercicio 15: En la siguiente figura $a = 20\ m/s^2$ y θ = 40 º. Calcular a_x y a_y



Ejercicio 16: En la siguiente figura $F_x = 50\ N$ y θ = 35 º. Calcular F y F_y



Ejercicio 17: En la siguiente figura $\tau_y = 10\ N$ y θ = 335 º. Calcular τ y τ_x



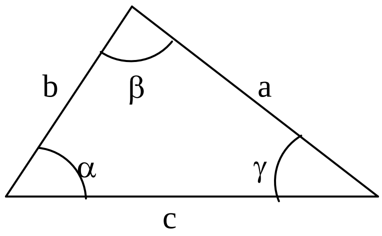
Ejercicio 18: Utilizando los elementos del siguiente triángulo, calcular lo que se pide en cada ítem:

a) a = 7 cm ; b = 9 cm ; $\gamma = 60°$; c = ?

b) c = 2,2 cm ; a = 1,7 cm ; $\beta = 120°$; b = ?

c) a = 82 cm ; b = 57 cm ; c = 61 cm ; β = ?

d) c = 16 cm ; $\alpha = 52°$; $\beta = 35°$; b = ?



Ejercicio 19: Plantear y resolver las siguientes situaciones problemáticas.

a) "Desde un avión que vuela a 500m de altura se divisa una boya. La visual dirigida desde el avión a la boya forma con la vertical un ángulo de 45º. Determinar a qué distancia de la boya se encuentra el avión."

b) "Se apoya una escalera en la pared a una distancia de 12 metros formando esta un ángulo de 60º con el piso, ¿Cuál es la longitud de la escalera?

c) Calcular la altura de una antena, sabiendo que su sombra mide 20 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 75º con el suelo.

d) ¿Qué altura debe tener un poste que sostendrá una antena si unos de los cables que la sujeta tiene de longitud 19 m. y forma un ángulo de 65º con el piso?

d) Un árbol se quebró y su extremo superior forma con el piso un ángulo de 48º, si éste quedó a una distancia de 7m. de la base del árbol ¿Cuánto mide el árbol?