UNIDAD N° 2: ECUACIONES – INECUACIONES – SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

ÍNDICE GENERAL DE LA UNIDAD

ÍNDICE REDUCIDO DE TEMAS DE LA UNIDAD

ESTA UNIDAD CONTIENE LOS SIGUIENTES TEMAS:

- **ECUACIÓN LINEAL**
- **ECUACIÓN CUADRÁTICA**
- **DESIGUALDADES E INECUACIONES**
- **VALOR ABSOLUTO**
- **SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS**
- **PROPORCIONALIDAD**

CONSEJOS A TENER EN CUENTA ANTES DE EMPEZAR:

- ✓ **LEER CON MUCHA ATENCIÓN LOS CONTENIDOS.**
- ✓ **PONER ÉNFASIS EN LOS EJEMPLOS.**
- ✓ **RESOLVER MINUCIOSAMENTE LOS EJERCICIOS.**
- ✓ **CONSULTAR LAS DUDAS QUE PUEDAN SURGIR.**

ECUACIONES – INECUACIONES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

INTRODUCCIÓN

Algunas igualdades entre expresiones algebraicas son ciertas, para todos los valores que demos a las letras, que intervienen en ellas.

Estas igualdades reciben el nombre de **identidades**. Así por ejemplo: 3(x+5) = 3x +15 es una identidad, porque ambos miembros toman el mismo valor numérico para cualquier número que sustituya a "*x*".

Mientras, que hay otras igualdades, que se verifican para algún o algunos valores de las letras, y se denominan **ecuaciones**. Por ejemplo: 2x-13 = 1, obtenemos en ambos lados del signo igual el mismo valor numérico, sólo cuando *x* es igual a 7. Se trata por lo tanto de una "**ecuación**".

Las **soluciones** de una ecuación, son aquellos números que, cuando sustituyen a las letras de la ecuación, hacen que la igualdad sea verdadera.

ECUACIÓN LINEAL

A toda expresión algebraica de la forma $ax + b = 0$, donde a y b son números reales $(a \neq 0)$, se la llama **ecuación de primer grado en una incógnita** o simplemente **ecuación lineal**.

Ejemplos:

a) x – 3 = 0

b) $-\dfrac{7}{5} + 2x = 0$

c) 4x = 0

ACTIVIDADES

1. Expresar en forma simbólica los siguientes enunciados.

a) Distancia Tierra – Sol ....

- El doble de la distancia Tierra – Sol ....
- El triplo de la distancia Tierra – Sol ....
- La tercera parte de la distancia Tierra – Sol ....
- La mitad de la distancia Tierra – Sol disminuida en 6×10^5Km ....

b) Grado (intensidad) de un sismo ....

- ❖ El siguiente de dicho grado ....
- ❖ El grado más su cuadrado ....
- ❖ La suma del grado y de los dos que le siguen ....
- ❖ El doble del anterior a dicho grado ....
- ❖ El duplo del cuadrado del grado menos la cuarta parte de su sucesor......................

2. Determinar el valor de la incógnita en caso de ser posible.

a) $2x + 8 = 5$

b) $-3x + 6 = 4$

c) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 5$

d) $6x - \frac{4}{6} = 7$

e) $9x + \frac{1}{5} = \frac{2}{3}$

f) $\frac{y}{4} - \frac{7}{3}y = 5$

g) $3c + 7c = 3(3c - 1) + 3$

h) $\frac{x-1}{4} = \frac{2x}{-3}$

i) $37 + 8x = 4(7 + 2x)$

j) $3(4d - 10) = 6(2d - 5)$

k) $2(x + 2) + 3 = 4\ (1 - x)$

l) $5\ (x + 1) - 3 = x - (2 + x)$

m) $x + \frac{x-1}{5} = 2x - \frac{3-x}{2}$

n) $\frac{3x}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2}$

ñ) $\frac{\sqrt[3]{2x-4}}{8} = \frac{1}{4}$

3. Resolver las siguientes situaciones.

a) ¿Cuál es el número cuya tercera parte aumentada en $\frac{4}{5}$ del mismo, pero disminuida en 5 unidades, sobrepasa en 15 unidades el valor del número dado?

b) Tres personas heredan 1140 acciones; según el testamento, la primera recibe la mitad de lo que recibe la segunda, y la tercera 6 acciones menos que el triplo de la primera. ¿Cuánto le corresponde a cada una?

c) Juan y Pedro son mellizos. Julio tiene 2 años más que ellos, y las edades de los tres sumadas dan 23 ¿Qué edad tiene Julio?

d) Dado un cuadrilátero abcd, la medida del ángulo $\hat{a}$ excede la medida del $\hat{b}$ en 40º; además el $\hat{d}$ es el duplo del $\hat{b}$ y también la mitad del $\hat{c}$. Obtener la medida de los ángulos.

ECUACION CUADRÁTICA

Una **ecuación cuadrática** en la variable x es una ecuación que puede escribirse de la siguiente forma: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son constantes ($a \neq 0$).

¿Cómo resolvemos dicha ecuación?

Teniendo en cuenta la siguiente formula: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, donde x_1 y x_2 se les denomina raíces de dicha ecuación (también llamados ceros de la ecuación) y determinan la solución de las mismas.

ACTIVIDADES

1. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $(x+1)(x-2) = 0$

d) $x^2 - 3x = 10$

e) $2\,(x - 3)\,(x + 1) = x\,(x - 1) + 2$

f) $3\,(x + 1)^2 = 27$

g) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{1}{3}$

h) $\sqrt{21x-6} = 3x$

i) $3x + \sqrt{3x-1} = 1$

j) $x^3 + x^2 = 2x$

k) $x^2 = \dfrac{x+3}{2}$

l) $\dfrac{x-6}{3x+2} = x - 2$

2. Observar y decir, fundadamente, cuáles son las raíces de la ecuación y cuál es su grado.

a) $-5\left(\mathbf{x} + \dfrac{1}{2}\right)\cdot(\mathbf{x} - 5) = 0$

b) $(\mathbf{x} + 2)\cdot\left(\mathbf{x} - \dfrac{1}{3}\right) = 0$

c) $\dfrac{2}{3}(\mathbf{x} + 4)\cdot(\mathbf{x} + 1) = 0$

3. Si 2 y –3 son las raíces de la ecuación $4x^2 + bx - 24 = 0$ determinar cuánto vale b.

4. Encontrar todas las raíces reales.

a) $x^2 + 2x - 24 = 0$

b) $4 - 2n + n^2 = 0$

c) $p^2 - 5p + 3 = 0$

d) $6x^3 + 5x^2 - 4x = 0$

e) $(x + 1)^2 - 5x + 1 = 0$

f) $(x - 4)^2 = (x - 2)^2$

g) $x^2 + (x + 1)^2 = (2x - 1)(x + 3)$

h) $(2x + 1)(x - 1) + x^2 = 3(x - 1)(x + 2) - 3$

i) $x(x + 2)(x + 4) + x^3 = 2(x + 1)^3$

DESIGUALDADES E INECUACIONES

❖ Desigualdades

Una **desigualdad** es una expresión matemática que contiene cualquiera de los siguientes signos:

$\leq$ $\geq$ $<$ $>$

❖ Inecuaciones

Las i**necuaciones** son **desigualdades algebraicas** en la que sus dos miembros se relacionan por uno de estos signos:

$<$	menor que	$2x - 1 < 7$
$\leq$	menor o igual que	$2x - 1 \leq 7$
$>$	mayor que	$2x - 1 > 7$
$\geq$	mayor o igual que	$2x - 1 \geq 7$

- ❖ La **solución** de una **inecuación** es el conjunto de valores de la variable que la verifica,y se puede expresar mediante:
- ❖ 1. **Una representación gráfica.**
- ❖ 2. **Un intervalo.**
- ❖ En general una inecuación tiene infinitas soluciones.
- ❖ El **grado** de las inecuaciones se define como el de las ecuaciones
- ❖ **Resolver** una inecuación es hallar los valores que deben tomar sus variables para que se cumpla la desigualdad.

❖ **Ejemplos** de **Inecuaciones de primer grado**

(1) $2x - 1 < 7$

$2x < 8$ $\quad x < 4$

Solución: $(-\infty, 4)$

(2) $2x - 1 > 7$

$2x > 8$ $\quad x > 4$

Solución: $(4, \infty)$

(3) $2x - 1 \geq 7$

$2x \geq 8 \quad x \geq 4$

Solución : $[4, \infty)$

Otros ejemplos:

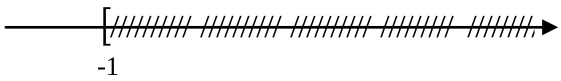
a) Resolver: $2(x + 1) + 3 \leq 5(x + 2) - 2$

Resolver los paréntesis: $2x + 2 + 3 \leq 5x + 10 - 2$

Agrupar los términos semejantes: $5 \leq 5x - 2x + 8 \Leftrightarrow 5 - 8 \leq 3x \Leftrightarrow -3/3 \leq x \Leftrightarrow -1 \leq x$

La solución es el conjunto de puntos del intervalo $[-1, +\infty)$

Gráficamente:



b) Una empresa de alquiler de coches cobra \$ 50 fijos más \$ 2.50 por kilómetro recorrido. Otra competidora no tiene canon fijo, pero carga \$5 por kilómetro. ¿A partir de qué distancia nos resulta más económica la primera?

Llamando x: kilómetros a recorrer, se tiene que calcular cuando el costo de la primera es menor que el de la segunda, es decir:

Se tiene costo de la primera: $50 + 2.5x$

Se tiene costo de la segunda: $5x$

Luego, $50 + 2.5x < 5x$

De donde $50 < 2.5x \Leftrightarrow x > 10$

La primera opción nos interesa para recorridos mayores a los 10 km.

ACTIVIDADES

1. Encontrar el intervalo solución de las siguientes inecuaciones:

a) $2x - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}x$

b) $9 < 3 + 2x < 13$

c) $x^2 - (3x+1) < (x-1)(x+2)$

d) $\frac{3(x-1)}{2} - 4x < 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)$

VALOR ABSOLUTO

Dado un número real **x**, se llama **valor absoluto de x,** y se simboliza | x | al número real positivo dado por:

$| x | = x$, si el número x es positivo o cero

$| x | = -x$, si el número x es negativo

Ejemplos:

a) | 8 | = 8

b) | -1,6 | = 1,6

c) | 0 | = 0

d) | 5 - 9 | = | -4 | = 4

Observación: El valor absoluto de un número x define la distancia del número x y el número 0, por ello el valor absoluto siempre es positivo.

PROPIEDADES

- $| x | = a$ si y sólo si $x = a$ ó $x = -a$
- $| x | \leq a$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$
- $| x | \geq a$ si y sólo si $x \leq -a$ ó $x \geq a$
- $\sqrt{x^2} = | x |$

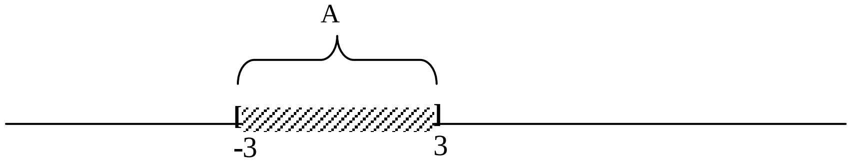
Ejemplos:

Determinar el conjunto que representa cada una de las siguientes expresiones:

a) $| x | \leq 3$

De acuerdo a la **propiedad correspondiente** del valor absoluto, se tiene:

$| x | \leq 3$ sii $-3 \leq x \leq 3$ es decir, son los valores de $x \in [-3,3]$



b) $| x | \geq \frac{1}{2}$

De acuerdo a la **propiedad correspondiente** del valor absoluto, se tiene:

$|\,x\,| \geq \frac{1}{2}$ sii $x \geq \frac{1}{2}$ ó $x \leq -\frac{1}{2}$ es decir, son los valores de $x \in (-\infty\ , -1/2\ ] \cup\ [1/2\ , +\infty)$

c) $|\,x-2\,| \leq 3$

De acuerdo a la **propiedad correspondiente** del valor absoluto, se tiene:

$|\,x-2\,| \leq 3$ sii $-3 \leq x - 2 \leq 3$ sii $-3 + 2 \leq x \leq 3 + 2$ sii $-1 \leq x \leq 5$, es decir, son los valores de $x \in [\,-1, 5]$

ACTIVIDADES

1. Resolver las siguientes desigualdades y representar gráficamente el conjunto solución:

a) $|x-1| \leq 3$

b) $|x+2| < 5$

c) $\left|2x-\frac{1}{2}\right| < 3$

d) $|x-1| \geq 3$

e) $|x+2| > 5$

f) $\left|2x+\frac{1}{2}\right| > 6$

g) $|1-2x| < 5$

h) $|1-2x| > 3$

i) $\left|\frac{2+3x}{3}\right| < 1$

j) $\left|\frac{1-2x}{2}\right| > 2$

k) $\left|\frac{1}{\mathbf{x}-4}\right| > 2$

l) $\left|\frac{6}{-3\mathbf{x}+3}\right| \geq 1$

2. Determinar los siguientes conjuntos y expresarlos, si es posible, como intervalos:

a) $A = \{x / x \in \mathbb{Z}\ \text{y}\ |\,3x-7\,| = 4\}$

b) $B = \{x / x \in \mathbb{N}\ \text{y}\ x^2 - 25 < 0\}$

c) $C = \{x / x \in \mathbb{R} : |x-4| \leq 2\}$

d) $D = \{\ x / x \in R: |\ 2x - 1\ | < 3\ \} \cup \{x / x \in \mathbb{N}\ \text{y}\ |\,x+1\,| = 3\}$

e) $E = \{\ x / x \in R: |\ 3 - x\ | \leq\ 2\ \text{y}\ x^2 - 2 \leq 7\ \}$

f) $F = \{\ x / x \in R : |\ 2x - 1\ | \geq 5\ \text{y}\ |\ x + 1\ | \leq 4\ \}$

g) $G = \{x / x \in \mathbb{Z} : |2x| < 5\} \cup \{x / x \in \mathbb{N} : 5 - x^2 > 4\}$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS

Téngase en cuenta, la siguiente situación:

"El doble del número x, más el número y, es igual a 7. La diferencia entre x e y es igual a 2"

La traducción al lenguaje simbólico de la situación planteada es: $\begin{cases} 2\mathbf{x}+\mathbf{y}=7 \\ \mathbf{x}-\mathbf{y}=2 \end{cases}$

Lo que se acaba de escribir, representa un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**, lo definiremos de la siguiente forma:

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un par de ecuaciones lineales que se suelen representar de la siguiente forma: $\begin{cases} a_1\,x+b_1\,y=c_1 \\ a_2\,x+b_2\,y=c_2 \end{cases}$

Donde:

- **x** e **y** son los números reales llamados **incógnitas**,
- a_1, b_1, a_2 y b_2 son los números reales llamados **coeficientes**
- c_1 y c_2 son los números reales llamados **términos independientes**.

Los sistemas de ecuaciones ayudan, por lo tanto, a plantear y resolver problemas parecidos al redactado en el párrafo anterior.

El par de números **(x, y)** que satisface ambas ecuaciones de un sistema se llama **solución** del sistema de ecuaciones.

CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS LINEALES

1. Sistema ***compatible***: es el que tiene solución.

Dependiendo del número de soluciones puede ser:

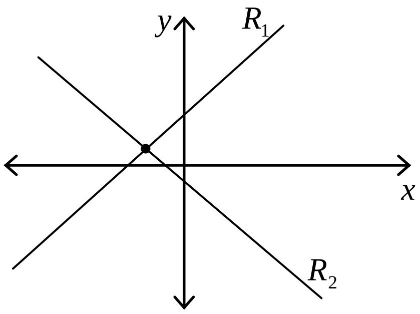
- Sistema ***compatible determinado*** si tiene una única solución.
- Sistema ***compatible indeterminado*** si tiene múltiples (infinitas) soluciones.

2. Sistema ***incompatible***: es el que no tiene solución.

Importante:

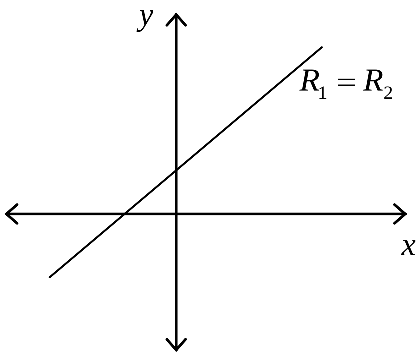
Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, gráficamente representa el dibujo de dos rectas en el plano. Por lo tanto, puede ocurrir:

- **Caso *a*:** Que las dos rectas se corten en un único punto. ***Sistema Compatible Determinado***



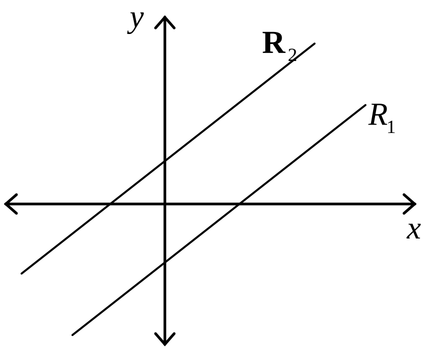
Esto indica que: El sistema dado tiene **solución única**. Dicha solución son las coordenadas del punto de corte.

- **Caso *b*:** Que las dos rectas estén superpuestas (o sea coincidentes). ***Sistema Compatible Indeterminado***



Esto indica que el conjunto solución estará formado por infinitos pares (x,y).
Luego el sistema dado tiene **infinitas soluciones**.

- **Caso *c*:** Que las dos rectas sean paralelas (no coincidentes). ***Sistema Incompatible***



Luego se observa que no existen pares (x , y) que satisfagan a las dos rectas simultáneamente.
En consecuencia el conjunto solución, será un conjunto vacío.
Esto indica que el sistema dado **no tiene solución**.

A continuación, se analiza el <u>método de sustitución, el método de igualación</u> (analíticos) y el <u>método gráfico</u> para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (hay otros métodos analíticos de los cuales puede hacer uso).

❖ MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Para aplicar este método debe tener en cuenta los siguientes pasos:

Paso 1: De alguna de las ecuaciones del sistema despejar una de las incógnitas.

Paso 2: La variable despejada se reemplaza en la otra ecuación del sistema. De esta forma se obtiene una “ecuación lineal con una incógnita”.

Paso 3: Resuelva esta última ecuación, obteniendo así, el valor numérico de una de las incógnitas.

Paso 4: Retomando la expresión del Paso 1, reemplazar en ella el valor numérico de la incógnita, obtenido en el Paso 3. Resuélvala.

Paso 5: Obtuvo así la solución del sistema; (si es que el sistema planteado tenía solución única, en caso contrario, tendrá algunos inconvenientes en la aplicación del método).

Se aplica esta técnica al sistema planteado anteriormente.

$$\begin{cases} 2\mathbf{x} + \mathbf{y} = 7 & 1 \\ \mathrm{x} - \mathrm{y} = 2 & 2 \end{cases}$$

Paso 1: De la ecuación 1 despejamos: y = - 2x + 7

Paso 2: La expresión de “y” se reemplaza en 2

$$\mathbf{x} - (-2\mathbf{x} + 7) = 2$$
$$\mathbf{x} + 2\mathbf{x} - 7 = 2$$
$$3\mathbf{x} = 2 + 7$$

Paso 3: Se resuelve esta última ecuación lineal de una incógnita:

$$3\mathbf{x} = 9$$
$$\mathbf{x} = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{x} = 3}$$

Paso 4: Retomando la expresión del Paso 1, y = - 2x + 7; reemplazamos en ella el valor de x = 3 (obtenido en el Paso 3).

$$y = -2 \bullet 3 + 7 \;\Rightarrow\; \boxed{y = 1}$$

Paso 5: Se obtuvo la única solución para este sistema: (x , y) = (3,1).

$$\text{Verificamos: } \begin{cases} 2\mathbf{x} + \mathbf{y} = 7 \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \bullet 3 + 1 = 7 \Rightarrow 7 = 7 \\ 3 - 1 = 2 \Rightarrow 2 = 2 \end{cases}$$

❖ MÉTODO DE IGUALACIÒN

Para aplicar este método debe tener en cuenta los siguientes pasos:

Paso 1: Despejar la misma incógnita de cada ecuación.

Paso 2: Igualar las expresiones obtenidas y de esta forma se obtiene una "ecuación lineal con una incógnita".

Paso 3: Resolver esta última ecuación, obteniendo así, el valor numérico de una de las incógnitas.

Paso 4: Retomando la expresión del Paso 1, reemplazar en ella el valor numérico de la incógnita, obtenido en el Paso 3. Resuélvala.

Paso 5: Obtuvo así la solución del sistema; (si es que el sistema planteado tenía solución única, en caso contrario, tendrá algunos inconvenientes en la aplicación del método).

Se aplica esta técnica al sistema planteado anteriormente.

$$\begin{cases} 2\mathbf{x} + \mathbf{y} = 7 & 1 \\ x - y = 2 & 2 \end{cases}$$

Paso 1: De la ecuación 1 y 2 despejamos la variable y: y = - 2x + 7 e y = x - 2

Paso 2: Igualamos las expresiones obtenidas y de esta forma se obtiene una "ecuación lineal con una incógnita".

$$-2x + 7 = x - 2$$

$$7 + 2 = x + 2x$$

Paso 3: Se resuelve esta última ecuación lineal de una incógnita:

$$3\mathbf{x} = 9$$

$$\mathbf{x} = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

Paso 4: Retomando una de las expresiones del Paso 1, y = - 2x + 7; reemplazamos en ella el valor de x = 3 (obtenido en el Paso 3).

$$y = -2 \bullet 3 + 7 \;\Rightarrow\; \boxed{y = 1}$$

Paso 5: Se obtuvo la única solución para este sistema: (x, y) = (3,1).

Verificamos: $\begin{cases} 2\mathbf{x} + \mathbf{y} = 7 \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \bullet 3 + 1 = 7 \Rightarrow 7 = 7 \\ 3 - 1 = 2 \Rightarrow 2 = 2 \end{cases}$

❖ MÉTODO GRÁFICO

Básicamente consiste en: graficar cada una de las rectas que representan al conjunto solución de las ecuaciones del sistema, y analizar sus posiciones.

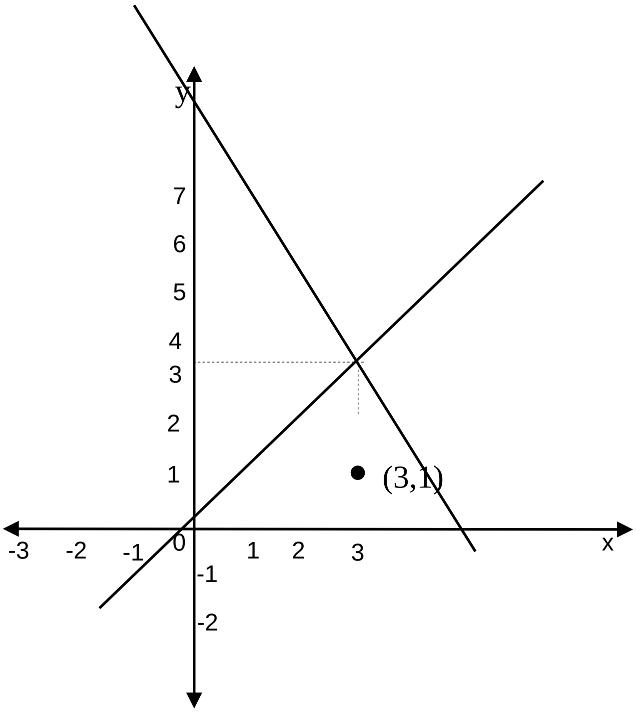
Importante:

Es conveniente, resolver previamente en forma gráfica el sistema dado, para analizar que tipo de solución nos espera, y luego aplicar un método analítico para justificar y confirmar lo hallado gráficamente.

Ejemplo: Resolver en forma gráfica el sistema planteado anteriormente.

Esto es: $\begin{cases} 2\mathbf{x}+\mathbf{y}=7 \\ \mathbf{x}-\mathbf{y}=2 \end{cases}$ o en forma equivalente $\begin{cases} \mathbf{y}=-2\mathbf{x}+7 \\ \mathbf{y}=\mathbf{x}-2 \end{cases}$

Se representan gráficamente en un mismo sistema ambas rectas:

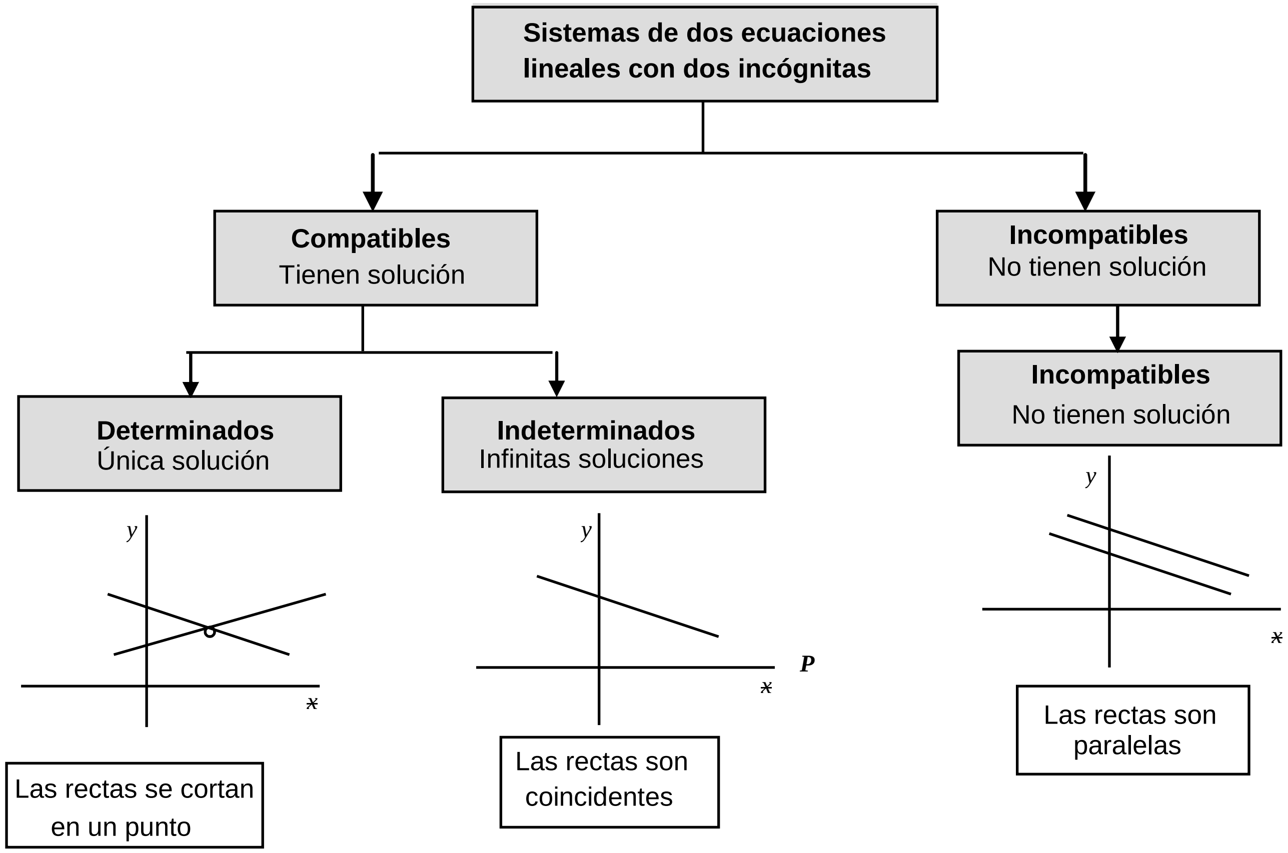


Se observa que las dos rectas se cortan un único punto de coordenadas (3,1). Por lo tanto, el sistema tiene solución única dada por el punto (x, y) = (3,1).

Observaciones:

1. Cualquiera sea el método que aplique para resolver un sistema de ecuaciones lineales, el conjunto solución es el mismo en todos los casos.

2. Antes de aplicar cualquier procedimiento algebraico es conveniente realizar primero la representación gráfica de las ecuaciones del sistema para determinar si el sistema tiene o no solución y si tiene solución establecer si es única o no.
3. En el siguiente cuadro se presenta una clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales.



ACTIVIDADES

1. Resolver en forma analítica y gráfica los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x - 1 = y \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ -5x + 6y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 5x + 4y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x = 10 - 3y \\ 12x = 10 - 9y \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x - \dfrac{4}{5}y - 2x + 3y = \dfrac{11}{5} \\ \dfrac{2}{3}x + 3y + 4x - 9y = -6 + 2x \end{cases}$

2. Resolver las siguientes situaciones problemáticas.

a) La suma de dos números es 28 y su diferencia es 8 ¿Cuáles son esos números?

b) En una jaula donde hay conejos y palomas se totalizan 35 cabezas y 94 patas ¿Cuántos animales de cada clase hay?

c) Dos amigos van a desayunar juntos, piden 2 cafés y 1 alfajor para uno de ellos, junto con el pedido les entregan la cuenta: $6. Luego, piden otros 2 cafés y al traer la nueva cuenta el mozo informa que en la anterior les había cobrado un alfajor de más y que se los descuenta en esta última; por lo que ahora deben pagar $3 ¿Cuánto gastó cada uno?

d) Si se aumenta en 2cm el largo y el ancho de un rectángulo, el perímetro es 24cm. Si el largo se disminuye en 2cm resultará un cuadrado ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

e) Se mezclan dos tipos de maníes de 1.100 y 1.450 pesos/kg, obteniéndose 200 kilos. Al secarse pierden un 12 % de su peso, vendiéndose el conjunto a 1600 pesos/kg. ¿Qué cantidad de cada clase de maníes se tenía en un principio si el valor de la venta ha sido el mismo?

f) Un comercio vende calculadoras aritméticas a $ 75 y calculadoras científicas a $ 180. Cierto día el comercio vendió 16 calculadoras por un importe total de $ 1935 ¿Cuántas calculadoras eran aritméticas?

g) Un lado de un triángulo isósceles mide 3 cm menos que la suma de los dos lados iguales. El perímetro es de 33 cm. ¿Cuánto mide cada lado?

PROPORCIONALIDAD

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

En la vida cotidiana, se pueden encontrar muchas **magnitudes** que se relacionan entre sí, mediante una **proporción** (velocidad – tiempo; peso – precio; etc.).

Se analiza el siguiente:

Ejemplo:

Vicente quiere hacer un postre de chocolate para su fiesta de cumpleaños. Consulta en un libro de cocina y la receta indica que para 6 personas hay que utilizar 120g de chocolate ¿Qué cantidad de chocolate tendrá que usar si a la fiesta van 12 personas? ¿Y si van 18? ¿Y para 3 personas?

Se escriben las respuestas en una tabla:

Número de personas	6	12	18	3
Gramos de chocolate	120	240	360	60

Se establece una proporción entre los gramos de chocolate necesarios y el número de personas:

$$\frac{120}{6}=\frac{240}{12}=\frac{360}{18}=\frac{60}{3}=20$$

En la proporción todos los cocientes son iguales a 20, que es la **razón de proporcionalidad**. Esto, se puede expresar diciendo: **"Se necesitan 20gr de chocolate por persona**".

Observar que:

Al aumentar una magnitud la otra también aumenta, y si disminuye una, la otra también lo hace. Estas magnitudes son directamente proporcionales.

Dos magnitudes "*x* e *y*" son **directamente proporcionales** cuando la razón entre ellas es un valor constante. x e y son magnitudes directamente proporcionales $y = kx, k = \text{cte}$.

Atención:

Todas las magnitudes no son directamente proporcionales, aunque a veces lo parezcan.

Ejemplo:

Observa la siguiente tabla, que muestra los pesos de un niño recién nacido, verás que al aumentar en edad, aumenta su peso, pero no lo hace directamente proporcional, ya que los cocientes de sus razones no son constantes.

Días	0	15	21	28	35
Peso (g)	3500	3820	3960	4320	4750

PROPORCIONALIDAD INVERSA

En algunas ocasiones dos magnitudes están relacionadas de modo que cuando una aumenta, la otra disminuye. Lo hacen de forma proporcional, es decir, al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda dividida por el mismo número.

Estas magnitudes están relacionadas por una **proporcionalidad inversa**, o bien son **inversamente proporcionales**.

Ejemplo:

En un colegio, se quiere hacer una excursión a las Sierras de Tandil. El autobús dispone de 60 plazas y cuesta $900. Elena y Juan forman parte de la comisión organizadora, y hacen un estudio de precio que debe pagar cada alumno según el número de participantes. ¿Cuánto pagará cada uno, si van 30 alumnos?

Como el precio del autobús completa todas las plazas, el viaje será más barato, si se ocupan la mitad de las plazas, el precio por persona será el doble, etc.

Veamos esta situación en el siguiente cuadro:

Personas	1	2	3	20	30	60
Precio/Plaza	900	450	300	45	30	15

Se observa que:

Si multiplicas el número de personas que participan por el precio por persona, siempre obtienes la misma cantidad: 900. Las magnitudes, número de personas y precio por persona están es "**proporcionalidad inversa**".

Dos magnitudes "*x* e *y*" son **"inversamente proporcionales"** cuando el producto entre ellas es un valor constante. *x* e *y* son inversamente proporcionales $\Leftrightarrow x \bullet y = k$ con *k*=cte.

APLICACIÓN DE PROPORCIONALIDAD

Veremos procedimientos para resolver situaciones en las que intervienen magnitudes directas o inversamente proporcionales. Estos procedimientos se conocen con el nombre de "Regla de tres", pues se conocen tres valores de las magnitudes y hay que hallar el cuarto valor para que formen una proporción. Pueden ser del tipo:

- **Regla de tres directa**: Cuando las magnitudes están en proporcionalidad directa.
- **Regla de tres inversa**: Cuando las magnitudes están en proporcionalidad inversa.
- **Regla de tres compuesta**: Cuando más de dos magnitudes están relacionadas entre sí. En este caso hay que determinar que clase de proporcionalidad (directa, inversa) existe entre cada una de ellas.

ACTIVIDADES

1. Para empaquetar 180 libros de inglés, una librería necesita 15 cajas ¿Cuántas necesitará para empaquetar 108 libros?

2. Para hacer un viaje de 260Km, se consume 18 litros de nafta ¿Cuántos litros se gastarán si se quiere recorrer una distancia de 400Km?

3. La propaganda de un medicamento que se expende en pastillas de 5mg dice que contiene 0,20mg de aspirina. Si también se expende en pastillas de 8mg ¿Qué contenido de aspirina tendrá?

4. En una granja hay alimento para 100 gallinas durante 40 días. Se compran 25 gallinas más ¿Para cuántos días tendrán comida con la misma cantidad de alimento?

5. Un avión que vuela a 648Km por hora tarda 1h 20m para unir dos ciudades ¿Cuánto tardará un helicóptero para recorrer el mismo camino en un promedio de 192Km por hora?

6. Juan da pasos de 40cm. Su padre da pasos de 66cm. Si para recorrer una cuadra el padre dio 200 pasos ¿Cuántos pasos dio Juan?

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Antes de comenzar esta tarea, te damos algunos consejos útiles para que tengas en cuenta:

- ❖ Toma lápiz, papel y paciencia, mucha paciencia.
- ❖ Lee el enunciado, pausadamente, si no lo interpretas, vuelve a leerlo, una y otra vez.
- ❖ Si desconoces el significado de alguna expresión, averígualo, puede aclararte muchas dudas.
- ❖ Ahora es el momento de utilizar lápiz y papel. Pon en claro, cuales son los datos y cuales las preguntas.
- ❖ Analiza tus datos (puedes relacionarlos).
- ❖ Aplica tu talento, aquí no valen consejos.
- ❖ No te desanimes (no va a vencerte, un trozo de papel escrito), siempre puedes volver a empezar, puede haberse "pasado" algo inadvertidamente.
- ❖ Si tienes éxito, no te envanezcas, puede existir solución mejor. ¡Inténtala!

EJERCICIOS PRÁCTICOS

Ejercicio 1: Escribir en lenguaje simbólico los siguientes enunciados:

a) Un número

b) El anterior de un número.

c) El sucesor de un número.

d) La mitad de un número.

e) Un número par.

f) Un número impar.

g) El doble de un número menos su antecesor.

h) El cuadrado de la diferencia de un número y su triplo.

Ejercicio 2: Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3(2x - 1) = 8x - 9$

b) $9x + 5 - 3 = 2(x + 2) - 9$

c) $\frac{x+3}{2} = \frac{2x+1}{3}$

g) $x^2 - 4x + 13 = 0$

h) $x^2 + 36 = 12x$

i) $3x^2 - 5x + 1 = 2 - 6x + 3x^2$

d) $3(x - 12) = 7(x - 2) + 3$

e) $5 + 2x = 4x + 1 + 4$

f) $5x - 2(x - 1) = 7 + 3x$

j) $(z - 1)^2 - 3(z + 1) = z^2 - 17$

k) $2x\left(x + \frac{5}{2}\right) = -3$

Ejercicio 3: Despejar cada una de las variables que figuran en las siguientes expresiones algebraicas.

a) $\frac{x}{2} - y = \frac{2}{3}$

b) $\frac{x - y}{2} = -1$

c) $3(2y - x) = -9$

d) $2y - 4 = x^3 - 3$

e) $\frac{1}{x^3 + 8} - y = 0$

f) $y - \frac{3}{3 - x} = 1$

g) $\frac{2y}{(x - 1)^2} = -1$

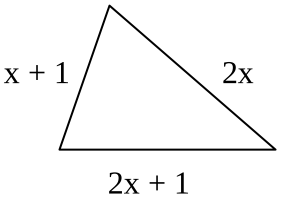
h) $\frac{1}{\sqrt[3]{x + 9}} - y + 1 = 0$

Ejercicio 4: Resolver las siguientes situaciones problemáticas.

a) Si al cuadrado de un número natural se le resta su sucesor, se obtiene el cuadrado de su antecesor. ¿Cuál es ese número?

b) Juan compró dos lápices y un marcador por $16,35. Si un lápiz cuesta la mitad del otro y el marcador $0,10 más que el lápiz más caro. ¿Cuánto pagó por cada artículo?

c) En el siguiente triángulo el perímetro es igual a 12cm. Determinar cuánto mide cada lado y clasificar el triángulo.



d) Se vende un tercio de una tela, luego el quinto del resto, quedando sin vender 400m de la misma. ¿Cuál es la longitud total de la tela?

e) Cuando la familia García va al cine, compra dos boletos para adultos y tres de niños. El boleto de un adulto cuesta $2 más que el del niño. Además, el precio promedio de los boletos de la familia es de $33,8. ¿Cuál es el precio de cada boleto?

f) La longitud de los lados de un triángulo son números naturales consecutivos. Si el perímetro del triángulo es de 18cm. Encontrar los lados del triángulo.

g) Si el perímetro de un rectángulo es de 168cm y la longitud de un lado es de 46cm. ¿Cuánto mide el otro lado del rectángulo?

h) Juan tiene 36 años y su hija 6. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el doble que la edad de su hija?

Ejercicio 5: Determinar los siguientes conjuntos y expresarlos, si es posible, como intervalos:

$A = \{ x \in Z : | x - 2 | = 4 \}$

$B = \{ x \in R: | x - 2 | = 4 \}$

$C = \{ x \in N : x^2 - 1 \leq 3 \}$

$D = \{ x \in N_0 : x^2 - 1 \leq 3 \}$

$E = \{ x \in R : x^2 - 1 \leq 3 \}$

$F = \{ x \in Z : | x | - 1 = 1 \text{ o } | x | + 3 = 3 \}$

$G = \{ x \in R : | -2x | > 4 \} \cup \{ x \in N : | x + 1 | < 4 \}$

$H = \{ x \in Z : | 1 - x | \leq 2 \text{ y } x^2 \leq 4 \}$

$I = \{ x \in R : | x + 1 | \geq 1 \text{ y } | x | \leq 1 \}$

Ejercicio 6: **Para cada uno de los Sistema de Ecuaciones Lineales dados a continuación, hallar analíticamente y gráficamente el conjunto solución S.**

a) $\begin{cases} 4x - y = 12 \\ 2x + 3y = -8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x - 9y = 3 \\ 6 - 4y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 5y = 4 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} + y = 0 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y+1} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x+1}{y-1} = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 4x = 1 - 6y \\ 12x + 18y = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \dfrac{2x - y}{3} = x \\ x - \dfrac{y}{2} = \dfrac{1}{2} y - 2x \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x = 12 + 4y \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x - 2y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

Ejercicio 7: Resolver las siguientes situaciones problemáticas.

a) En una vinotera se han vendido 18 botellas de vino reserva de la marca AB y 13 de champagne de la marca BC por $3500. Una botella de champagne BC cuesta el cuádruple de lo que cuesta una de vino reserva AB. ¿Cuál es el precio de una botella de champagne BC?

b) Un triángulo tiene 52cm de perímetro, un lado mide 2/3 del segundo y el restante tiene 3cm más que el primero. Determinar la longitud de cada lado.

c) Mi equipo de fútbol favorito ha jugado 18 partidos de los cuales ha perdido 4. Si hasta el momento ha obtenido 18 puntos. ¿Cuántos partidos ganó y cuántos empató?

d) Un automovilista recorre 748 km en tres etapas. En la segunda etapa recorrió 124 km más que en la primera y en la tercera etapa, 100 km menos que en la segunda. ¿Cuántos km recorre en cada etapa?

e) Un grupo de 20 personas, después de una caminata, encontró un árbol con 49 naranjas. Cada hombre comió 3, cada mujer 1 y sólo quedó 1 naranja en el árbol. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres formaban el grupo?

f) En un grupo de 9 personas hay doble número de mujeres que de hombres. ¿Cuántos hay de cada sexo?

g) En un test de elección múltiple se otorgan 4 puntos por cada respuesta correcta y se resta 1 punto por cada respuesta errónea. Un estudiante responde 17 y obtiene 43 puntos. ¿Cuántas preguntas respondió correctamente?