

## UNIDAD N° 3: EXPRESIONES ALGEBRAICAS – POLINOMIOS

### ÍNDICE GENERAL DE LA UNIDAD

|                                                                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Expresiones Algebraicas Enteras.....                                                                            | 3  |
| Polinomios.....                                                                                                 | 3  |
| Actividades.....                                                                                                | 4  |
| Valor Numérico del polinomio.....                                                                               | 4  |
| Concepto de raíz de un polinomio.....                                                                           | 4  |
| Actividades.....                                                                                                | 5  |
| Operaciones con Polinomios.....                                                                                 | 5  |
| ❖ Suma (Resta) de Polinomios.....                                                                               | 5  |
| ❖ Multiplicación de Polinomios.....                                                                             | 5  |
| ❖ Productos Especiales: Cuadrado de un binomio.....                                                             | 6  |
| Cubo de un binomio.....                                                                                         | 6  |
| Diferencia de cuadrados.....                                                                                    | 7  |
| ❖ División de Polinomios.....                                                                                   | 7  |
| División de un polinomio por un polinomio cualquiera.....                                                       | 7  |
| División de un polinomio por un binomio (Regla de Ruffini).....                                                 | 8  |
| Teorema del Resto.....                                                                                          | 9  |
| Actividades.....                                                                                                | 9  |
| Factorización de Polinomios.....                                                                                | 10 |
| ❖ Factor Común.....                                                                                             | 10 |
| ❖ Trinomio Cuadrado Perfecto.....                                                                               | 11 |
| ❖ Diferencia de Cuadrados.....                                                                                  | 11 |
| ❖ Factorización por medio de raíces: Teorema Fundamental del Algebra.....                                       | 12 |
| ❖ Determinación de las raíces para un polinomio de primer grado.....                                            | 12 |
| ❖ Determinación de las raíces para un polinomio de segundo grado.....                                           | 13 |
| ❖ Determinación de las raíces racionales para un polinomio de grado mayor que dos con coeficientes enteros..... | 13 |
| Actividades.....                                                                                                | 15 |
| Ejercicios prácticos.....                                                                                       | 16 |

## **ÍNDICE REDUCIDO DE TEMAS DE LA UNIDAD**

**ESTA UNIDAD CONTIENE LOS SIGUIENTES TEMAS:**

- ❖ **EXPRESIONES ALGEBRAICAS**
- ❖ **VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO**
- ❖ **OPERACIONES CON POLINOMIOS EN UNA INDETERMINADA**
- ❖ **FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS**
- ❖ **DISTINTOS CASOS DE FACTORIZACIÓN**

**CONSEJOS A TENER EN CUENTA ANTES DE EMPEZAR:**

- ✓ **LEER CON MUCHA ATENCIÓN LOS CONTENIDOS.**
- ✓ **PONER ÉNFASIS EN LOS EJEMPLOS.**
- ✓ **RESOLVER MINUCIOSAMENTE LOS EJERCICIOS.**
- ✓ **CONSULTAR LAS DUDAS QUE PUEDAN SURGIR.**

## EXPRESIONES ALGEBRAICAS

*Es un conjunto de letras y números ligados por operaciones (suma, resta, multiplicación y división).*

### Ejemplos:

Son expresiones algebraicas

a)  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ , es una expresión algebraica en las variables  $r$  y  $h$ .

b)  $10 - 3\sqrt[5]{y} + \frac{5}{7+y^2}$  es una expresión algebraica en la variable  $y$ .

c)  $(a+b)^3 - 3a - 12a \cdot b^2$  es una expresión algebraica en las variables  $a$  y  $b$ .

Algunas expresiones algebraicas en particular, con las que se trabajará en esta sección, reciben el nombre de **polinomios**.

## POLINOMIOS

Un **polinomio de grado  $n$** , en la indeterminada  $x$  es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

En el cual:

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ , son números reales denominados: **coeficientes**.
- $x$  es una variable denominada: **variable real**.
- $n$  es un número natural que indica el **grado del polinomio**.

### Para tener en cuenta:

- ❖ Si el polinomio es de grado cero, se llama polinomio **constante**.
- ❖ El coeficiente de la mayor potencia de  $x$  se llama **coeficiente principal**.
- ❖ Si el coeficiente principal es 1, el polinomio se dice **mónico**.
- ❖ El coeficiente  $a_0$  se llama **término independiente**.
- ❖ El polinomio de un solo término (no nulo) se llama **monomio**, el de dos (no nulos), **binomio**, etc.
- ❖ Dos monomios son semejantes si tienen la misma parte literal.
- ❖ Si al polinomio no le faltan términos se lo llama **polinomio completo**.
- ❖ El polinomio puede estar **ordenado** (en forma creciente o decreciente), o **desordenado**.

- ❖ Si todos los coeficientes son nulos, incluso  $a_0$ , el polinomio no tiene grado y se llama **polinomio nulo**.

**Desafío:** Averigua cómo se denomina a los polinomios que sólo tienen dos términos; y a los que tienen sólo tres términos. Esto es interesante, pues más adelante los utilizaremos muy a menudo.

### ACTIVIDADES

1. Decir si las siguientes expresiones son polinomios, en caso de no serlo indicar porqué.

a)  $P(x) = 5x^6 - \sqrt{3}x^4 - 2x + x^2$

b)  $Q(x) = 2x^3 + 9x^2 + 8x^{-1} + 5$

c)  $R(x) = 3\sqrt{x} + 5x - 6$

2. Indicar el grado de cada uno de los siguientes polinomios:

a)  $P(x) = x^2 + 3x - 4$

b)  $P(x) = x^4 + 5x^7 - 4x$

c)  $P(x) = x^2 + 3x - 4x^3 + 2$

3. Indicar si los polinomios están completos, ordenados o ambos. En caso de no estarlo escribirlos completos y ordenados en forma decreciente.

a)  $P(x) = 3x - 4 + x^2$

b)  $P(x) = x^3 + 3x^5 - 2$

4. Sabiendo que:  $(a + b)x^3 + ax^2 + (c + a)x - d - c = 5x^3 + 7x^2 + 3x - 2$ , calcular a, b, c, y d.

Dos polinomios son **iguales** si sus monomios semejantes son iguales

### VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

Dado un polinomio  $P(x)$ , al sustituir la variable  $x$  por un número  $a$  se obtiene un número que se denota  $P(a)$  y que es el **valor numérico** de  $P(x)$  para  $x = a$ .

**Ejemplo:** Encontrar el valor numérico del polinomio  $P(x) = x^2 + 3x - 4$  para  $x = 2$

$$P(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4 = 6$$

Se dice que  $a$  es **raíz del polinomio  $P(x)$**  si y sólo si  $P(a) = 0$ .

## ACTIVIDADES

Hallar el valor numérico de los siguientes polinomios e indicar si es raíz.

a)  $P(x) = x^2 + 3x - 4$ , para  $x = 1$

b)  $P(x) = x^2 + 3x - 4x^3 + 2$ , para  $x = 0$

## OPERACIONES CON POLINOMIOS

Para operar con polinomios resulta conveniente completarlos y ordenarlos en forma decreciente, aunque para la suma (resta) y producto no es imprescindible.

### ❖ Suma (resta) de Polinomios

La suma (resta) de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando (restando) los monomios semejantes.

### Ejemplos:

Sean  $P(x) = 2x^4 - x^3 + x$  y  $Q(x) = x^3 - 5x^4 - x^2 + 7$ , determinar:

a)  $P(x) + Q(x)$

b)  $P(x) - Q(x)$

a) Completando y ordenando los polinomios y ubicándolos de manera que resulten encolumnados los monomios semejantes, resulta:

$$\begin{array}{r} P(x) \quad 2x^4 - x^3 + 0x^2 + x + 0 \\ + \\ Q(x) \quad -5x^4 + x^3 - x^2 + 0x + 7 \\ \hline \end{array}$$

$$P(x) + Q(x) \quad -3x^4 + 0x^3 - x^2 + x + 7$$

b)  $P(x) \quad 2x^4 - x^3 + 0x^2 + x + 0$

—

$$\begin{array}{r} Q(x) \quad -5x^4 + x^3 - x^2 + 0x + 7 \\ \hline \end{array}$$

$$P(x) - Q(x) \quad 7x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 7$$

### ❖ Multiplicación de Polinomios

Para multiplicar dos polinomios se aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y luego se suman los monomios semejantes.

**Ejemplo:**

Dados los polinomios  $R(x) = 2x^4 - x^3 + x$  y  $S(x) = -5x^4 + x^3 - x^2 + 7$ , obtener  $R(x) \cdot S(x)$

En efecto:

$$\begin{aligned} R(x) \cdot S(x) &= (2x^4 - x^3 + x) \cdot (-5x^4 + x^3 - x^2 + 7) = \\ &= -10x^8 + 5x^7 - 5x^5 + 2x^7 - x^6 + x^4 - 2x^6 + x^5 - x^3 + 14x^4 - 7x^3 + 7x = \\ &= -10x^8 + 7x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 15x^4 - 8x^3 + 7x \end{aligned}$$

# **Productos Especiales:**❖ **Cuadrado de un binomio**

"El cuadrado de un binomio es siempre un trinomio, llamado trinomio cuadrado perfecto, formado por el cuadrado del primer término más el duplo del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término".

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2.a.b + b^2$$

**Ejemplo:**

Sea  $A(x) = 5 + x$ , determinar  $A(x) \cdot A(x)$  es lo mismo que  $[A(x)]^2$

$$A(x).A(x) = (5 + x)(5 + x) = 25 + 5x + 5x + x^2 = 25 + 10x + x^2 = [A(x)]^2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 5^2 & & x^2 \\ & \downarrow & \\ & 2.5.x & \end{array}$$

Aplicando la propiedad, resulta:

$$[A(x)]^2 = 5^2 + 2.5.x + x^2 = 25 + 10x + x^2$$

❖ **Cubo de un binomio**

"El cubo de un binomio es siempre un cuatrinomio, llamado cuatrinomio cubo perfecto, formado por el cubo del primer término más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término."

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3.a^2.b + 3.a.b^2 \pm b^3$$

**Ejemplo:**

Sea  $B(x) = 2 + x$ , determinar  $B(x).B(x).B(x) = [B(x)]^3$

$$B(x).B(x).B(x) = (2 + x).(2 + x)(2 + x) = (4 + 4x + x^2).(2 + x) =$$



Se ordenan ambos polinomios y se completa D(x).

$$\begin{array}{r}
 4x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 3x - 1 \quad \left| \begin{array}{l} 2x^2 - x + 1 \\ \hline 2x^2 + x - 3 \end{array} \right. \\
 - \quad 4x^4 - 2x^3 + 2x^2 \\
 \hline
 0x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 3x - 1 \\
 - \quad + 2x^3 - x^2 + x \\
 \hline
 0x^3 - 6x^2 + 2x - 1 \\
 - \quad - 6x^2 + 3x - 3 \\
 \hline
 0x^2 - 1x + 2
 \end{array}$$

Luego:  $C(x) = 2x^2 + x - 3$  y  $R(x) = -x + 2$

❖ **Caso particular de división de polinomios cuando el divisor sea un binomio de la forma:**

$$Q(x) = (x - a) \text{ o } Q(x) = (x + a)$$

En este caso es posible aplicar el método conocido como: “Regla de Ruffini”.

**Ejemplo de aplicación de la Regla de Ruffini.**

Sean  $D(x) = 2x^4 + 1 - 5x - x^2$  y  $Q(x) = x - 2$ , calcular  $D(x) \div Q(x)$ .

1) En primer lugar hay que completar y ordenar en forma decreciente el polinomio

$$D(x) = 2x^4 + 0x^3 - x^2 - 5x + 1$$

2) Proceder como se indica en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 0 & -1 & -5 & +1 \\
 a=2 & \downarrow & \rightarrow & & & \\
 & 4 & 8 & 14 & 18 & \\
 \hline
 & 2 & 4 & 7 & 9 & \boxed{19} \\
 & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & \\
 & \text{Coef. de } C(x) & & & & \text{Resto } R(x)
 \end{array}$$

El grado del polinomio cociente es un grado menor que el grado de D(x), por lo tanto:

$$\text{Cociente: } C(x) = 2x^3 + 4x^2 + 7x + 9 \quad \text{y} \quad \text{Resto: } R(x) = 19$$

❖ **Al dividir D(x) en Q(x) por el algoritmo de la división, D(x) resulta:**

$$D(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

- ❖ Si el resto  $R(x) = 0$ , entonces  $D(x) = C(x) \cdot Q(x)$ ; esto indica que  $D(x)$  es divisible por  $Q(x)$ .

### TEOREMA DEL RESTO

El valor numérico que toma el polinomio  $D(x)$  en  $x = a$ , es decir  $D(a)$ , coincide con el resto de dividir  $D(x)$  por  $(x-a)$

$$\begin{array}{r|l} D(x) & x - a \\ \hline R = D(a) & C(x) \end{array}$$

El teorema anterior es de gran utilidad pues nos permite asegurar que:

**Si  $x = a$  es raíz de  $D(x)$  entonces  $D(x)$  es divisible por  $x - a$**

### ACTIVIDADES

1. Colocar Verdadero ó Falso según corresponda, justificar

a)  $3x^2 - x^2 + 1 = 1 + 2x^2$  .....

b)  $x^3 + 1 = x^0 - 2x^3 + 3x^3$  .....

c)  $-5x^0 + \frac{1}{2}x + 2 = 3 + 0,5x$  .....

2. Sean los polinomios:  $M(x) = 3x^2 - 5x - 3$ ;  $N(x) = x^2 + 1$ ;  $K(x) = x - 1$ . Calcular:

a)  $2M(x) + 4N(x) + 3K(x)$

f)  $M(x) : K(x)$

b)  $M(x) - 2N(x)$

g)  $M(x) \cdot 2K(x)$

c)  $M(x) + 3N(x) - K(x)$

h)  $[M(x)]^2$

d)  $M(x) \cdot N(x)$

i)  $[N(x)]^3$

e)  $M(x) : N(x)$

3. Aplicar la regla de Ruffini para calcular las siguientes divisiones y verificar el resto por el teorema de resto.

a)  $P(x) = 7x^3 - 11x^2 - 12x + 45$ ,  $Q(x) = x - 3$

b)  $P(x) = x^2 + 4x + 6$ ,  $Q(x) = x + 2$

4. Encontrar un polinomio  $P(x)$  tal que:  $A(x) - 2B(x) + P(x) = x + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ , siendo:

$A(x) = 2x^4 - 3x^2 - 4x + 5$  y  $B(x) = x^3 - 5x^2 - 5x + 9$

5. Al multiplicar  $P(x)$  por  $3x^2$  se obtuvo  $-15x^4$ . ¿Cuánto vale  $P(x)$ ?
6. Al dividir  $M(x)$  en  $2x^3$  se obtuvo  $5x^2$ . ¿Cuánto vale  $M(x)$ ?
7. Indicar, sin realizar la división, si los siguientes polinomios son divisibles:
- a)  $P(x) = x^3 + 1$ ;  $Q(x) = x - 1$
- b)  $P(x) = x^2 + 6x + 9$ ;  $Q(x) = x + 3$
8. Hallar el valor de "k" para que los siguientes polinomios sean divisibles
- a)  $P(x) = 3x^2 + kx - 8$   $Q(x) = x - 2$
- b)  $P(x) = (3 + k)x^2 + k^2x - 5$   $Q(x) = x - 1$

### FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

#### ¿Qué es factorizar un polinomio?

Factorizar o factorizar un polinomio significa escribirlo como producto de factores (cada factor es un polinomio irreducible).

#### ¿Cómo se hace?

Para factorizar un polinomio es necesario recordar algunos casos sencillos de factorización de polinomios:

#### ❖ Factor Común

Sacar o extraer factor común significa identificar en todos los términos del polinomio dado aquellos factores que se repiten, agruparlos y expresar el polinomio original como producto de un monomio, constituido por los factores comunes, por un polinomio con términos en los que faltan los factores presentes en el monomio.

#### Ejemplos:

a) Dado  $P(x) = 27x^3 + 3x^2 - 6x^4$

Es fácil ver que todos los números son divisibles por 3 y que las letras son divisibles por  $x^2$ , por lo tanto  $3x^2$  es el factor común a todos los términos, luego extraemos  $3x^2$  y queda el polinomio factorizado de la siguiente forma:  $P(x) = 3x^2 (9x + 1 - 2x^2)$

b) Dado  $R(x) = 8b^5x^2y^3 - 6b^2c^3yz - 2b^4c^4xy^2z^2$ , factorizado queda

$$R(x) = 2b^2y(4b^3x^2y^2 - 3c^3z - b^2c^4xyz^2)$$

### ❖ Trinomio Cuadrado Perfecto

Al estudiar el cuadrado de un binomio se obtuvo como resultado un trinomio, llamado trinomio cuadrado perfecto:

$$P(x) = (x \pm a)^2 = x^2 \pm 2xa + a^2$$

Para saber si un trinomio es un cuadrado perfecto, se debe analizar:

1. Si dos de los términos son cuadrados perfectos, y en ese caso hay que buscar sus bases.
2. Si el término restante es el doble producto de las bases.

**Ejemplo:**

$$\begin{array}{ccccc}
 P(x) = & x^2 & - & 10x & + & 25 \\
 & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \\
 & (x)^2 & & & & (5)^2 \\
 & & & 2 \cdot x \cdot 5 = 10x & & 
 \end{array}$$

Por lo tanto:  $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

### ❖ Diferencia de Cuadrados

Si el polinomio dado es un binomio con ambos términos cuadrados perfectos, y uno de ellos es negativo, entonces se podrá factorizar como el producto de la suma por la diferencia de las bases de esos cuadrados.

$$P(x) = x^2 - a^2 = (x + a) \cdot (x - a)$$

**Ejemplos:**

a) Sea  $P(x) = 9 - x^2$

Las bases son:  $9 = (3)^2$

$$x^2 = (x)^2$$

Luego el polinomio quedará factoreado:  $P(x) = 9 - x^2 = (3 + x) \cdot (3 - x)$

b) Sea  $R(s) = (-9s^2 + 4t^2) = (4t^2 - 9s^2) = (2t - 3s) \cdot (2t + 3s)$

pues  $4t^2 = (2t)^2$  y  $9s^2 = (3s)^2$

### ❖ Teorema Fundamental del Álgebra. Factorización por medio de raíces

Todo polinomio de grado **n** tiene **a lo sumo n** raíces.

Por lo tanto es posible factorizar el polinomio  $P(x)$  de grado  $n$ , de la siguiente manera:

Si  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  tiene  $n$  raíces  $x_1, x_2, \dots, x_n$  entonces

$$P(x) = a_n (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n), \text{ con } a_n \text{ coeficiente principal.}$$

### Ejemplo:

Sea el polinomio  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$  sus raíces son:  $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = -2$

Según el Teorema Fundamental del Álgebra quedará factorizado:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - (-2)) = (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$$

El Teorema anterior es de gran utilidad, siempre que se conozcan las raíces del polinomio.

La pregunta es entonces,

**¿Cómo determinar las raíces en distintos polinomios?**

A continuación se presentan las formas de factorizar un polinomio aplicando el Teorema Fundamental del Álgebra de acuerdo al número de raíces que posee dicho polinomio, en concordancia con su grado.

❖ Para un polinomio de primer grado (lineal)  $P(x) = ax + b$

### ❖ Raíces de polinomios de primer grado

Si el polinomio es de la forma:  $P(x) = ax + b$ , con  $a \neq 0$ , para determinar la raíz igualamos el polinomio a cero, o sea  $P(x) = 0$ , y “despejamos”  $x$ .

Luego el polinomio factorizado queda:

$$P(x) = a(x - x_1)$$

### Ejemplo:

Factorizar  $P(x) = 2x - 5$  utilizando el Teorema anterior.

Para encontrar su raíz igualamos a cero y “despejamos”  $x$ , es decir:  $2x - 5 = 0$ .

Sumando 5 a ambos miembros, tenemos:  $2x = 5$ .

Dividiendo miembro a miembro por 2, resulta  $x = \frac{5}{2}$

Luego  $x = \frac{5}{2}$  es raíz de  $P(x) = 2x - 5$ .

El polinomio  $P(x)$  factorizado queda:  $P(x) = 2(x - \frac{5}{2})$ .

❖ Para un polinomio de segundo grado  $P(x) = ax^2 + bx + c$

❖ **Raíces de polinomios de segundo grado**

Si el polinomio es de la forma:  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 0$ , para determinar las dos raíces igualamos el polinomio a cero, o sea  $P(x) = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para encontrar los valores de  $x$  que verifican esta igualdad se usa la conocida fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estos valores  $x_1, x_2$  pueden ser números reales y distintos, números reales e iguales y números imaginarios.

Luego el polinomio factorizado queda:

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

**Ejemplo:** Dado el polinomio  $P(x) = x^2 - 5x + 6$ , determinar las raíces y factorizarlo.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

El polinomio  $P(x)$  factorizado queda:  $P(x) = 1(x - 3)(x - 2) = (x - 3)(x - 2)$

❖ Para un polinomio de grado mayor que dos con coeficientes enteros

❖ **Raíces de polinomios de grado mayor o igual a dos**

Para encontrar las raíces de un polinomio de tercer grado, (o mayor) de coeficientes enteros, se deberá aplicar el siguiente procedimiento:

Dado  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  con  $a_0 \neq 0$

❖ Buscar los divisores de los términos  $a_0$  (independiente) y  $a_n$  (principal)

❖ Generar el conjunto de "posibles raíces" con todas las fracciones  $\frac{\text{Divisores de } a_0}{\text{Divisores de } a_n}$

- ❖ Probar, utilizando el Teorema del Resto, cada una de estas fracciones hasta obtener una raíz de  $P(x)$ .
- ❖ Aplicando Ruffini se divide  $P(x)$  en  $(x - a)$  (siendo  $a$  la primera raíz encontrada) y se obtiene un polinomio de un grado menor que el dado.
- ❖ Si éste es dos, se aplica el procedimiento de polinomios de grado dos; si es mayor se busca otra raíz y se repite desde el paso anterior.

1. Los pasos anteriores sólo sirven para hallar las raíces racionales del polinomio, las irracionales y las complejas conjugadas se determinan con otros algoritmos.
2. Si  $a_0 = 0$ , factorizar primero extrayendo factor común y si el polinomio resultante verifica el enunciado, aplicar el procedimiento enunciado.

**Ejemplo:** Sea  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ , encontrar sus raíces y factorizarlo

$$a_0 = 6 \quad a_1 = 1$$

- ❖ Las posibles raíces son:  $\frac{\text{Divisores de } a_0}{\text{Divisores de } a_n} : \{ 6, -6, 3, -3, 2, -2, 1, -1 \}$

$$P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 6 = 8 \neq 0 \quad \Rightarrow -1 \text{ no es raíz de } P(x)$$

$$P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0 \quad \Rightarrow 1 \text{ es raíz de } P(x)$$

- ❖ Dividir  $P(x)$  por  $(x - 1)$  usando Regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$C(x) = x^2 - x - 6 \quad R(x) = 0$$

Por lo tanto:  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Puede expresarse:  $P(x) = (x^2 - x - 6) \cdot (x - 1)$

- ❖ Determinar las raíces de  $C(x) = x^2 - x - 6 = 0$

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_2 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Por lo tanto las raíces del polinomio  $P(x)$  son:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = -2$

El polinomio  $P(x)$  factorizado es:

$$P(x) = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$$

### ACTIVIDADES

1. Factorizar los siguientes polinomios:

a)  $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 8x$

g)  $C(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

b)  $R(x) = 9x^4 + 6x^2 + 1$

h)  $A(x) = 2x^2 - 6x$

c)  $M(x) = 16 + z^4 - 8z^2$

i)  $B(x) = 4x^2 - 1$

d)  $N(x) = -64 + z^2$

j)  $C(x) = x^2 - 10x + 25$

e)  $T(x) = 16 - y^4$

k)  $D(x) = 4x^2 - 4x + 1$

f)  $D(x) = 2x^3 - 18x$

l)  $E(x) = 2x^4 - 54x$

2. Encontrar las raíces de los siguientes polinomios y factorizarlos según el Teorema Fundamental del Álgebra.

a)  $R(x) = 2x^2 + 2x - 12$

b)  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

c)  $Q(z) = z^5 - 5z^3 + 4z + 3z^4 - 15z^2 + 12$

d)  $M(x) = x^4 - 9x^2 - x^3 + 9x$

3. Simplificar y resolver: (Recordar que para simplificar hay que factorizar previamente a la expresión)

a)  $-\frac{1}{x^2 - x} + \frac{2}{x^2 - 1}$

d)  $\left[ x - \frac{3}{x - 2} \right] : \left[ 1 - \frac{1}{x - 2} \right]$

b)  $\frac{u \cdot v}{u - v} : \frac{u^2 \cdot v^2}{u^2 - v^2}$

e)  $\frac{9x + 27}{x^3 + 6x^2 + 9x} \div \frac{9x - 27}{2x^3 - 18x}$

c)  $\frac{x^2 - 2x}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 6}$

f)  $\frac{x^2 - 6x + 9}{5x - 15} \times \frac{3x^2 - 27}{4x + 12}$

### EJERCICIOS PRÁCTICOS

**Ejercicio 1:** Determinar, si las siguientes expresiones algebraicas, son polinomios. En caso afirmativo, indicar su grado.

a)  $(3\sqrt{x} - 1)^2$

d)  $\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x + 2}$

b)  $x^3 - 3x - \frac{1}{2}$

e)  $\sqrt{(x+1)(x-1)}$

c)  $(3\sqrt{x})^2 - 1$

f)  $0,1 + \sqrt{2}x - 3x^{-2}$

**Ejercicio 2:** Teniendo en cuenta los siguientes polinomios, completar el cuadro.

$$R(x) = 2x + 2; N(x) = -2x^4 - 3x^2 + 1; Q(x) = 3x^2 - 2x + 4; H(x) = x - \frac{1}{2}; P(x) = 4x^2 - 1$$

|                      |  |                                  |  |
|----------------------|--|----------------------------------|--|
| $N(x) - H(x)$        |  | $N(x) : P(x)$                    |  |
| $R(x) + Q(x) - H(x)$ |  | $\frac{1}{2}R^2(x)$              |  |
| $P(x) \cdot H(x)$    |  | $\left[\frac{1}{2}R(x)\right]^2$ |  |
| $N(x) : H(x)$        |  | $N(x) + R(x) \cdot P(x)$         |  |
| $Q(x) : R(x)$        |  | $R\left(-\frac{1}{2}\right)$     |  |

**Ejercicio 3:** Aplicar la relación de la división  $P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$ , para encontrar un polinomio que dividido entre:  $x^2 - 1$ , de cociente:  $x + 3$  y resto:  $x - 2$ .

**Ejercicio 4:** Si  $H(x) = mx^3 + 6x^2 + 100$ , siendo m y c, números enteros, averiguar si 5 es un cero, de dicho polinomio.

**Ejercicio 5:** Obtener el valor de "t", sabiendo que al dividir  $B(x) = 6x^2 + tx - 2$ , por el binomio:  $x - 2$ , se obtiene resto 10.

**Ejercicio 6:** Obtener las siguientes potencias

a)  $(\sqrt{2}x + b)^2 =$

c)  $(a + b)^3 =$

b)  $(-3y + \sqrt{5})^2 =$

d)  $(a - b)^3 =$

**Ejercicio 7:** Usando el teorema Fundamental del Algebra, factorizar los siguientes polinomios.

$$P(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$R(x) = (2x + 5)(10 + x)^2$$

$$Q(x) = (x^2 - 3x + 1)(x - 1)$$

$$T(x) = (x^2 + 2x - 3)\left(2x - \frac{1}{2}\right)(3x + 1)$$

$$H(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$$

**Ejercicio 8:** Dado el polinomio factorizado, determinar el polinomio original.

**a)**  $P(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

**b)**  $Q(x) = -3 \cdot x \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$

**c)**  $R(x) = -2 \cdot x(x + 2)^2$

**d)**  $S(x) = -x \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)$

**Ejercicio 9:** Averiguar, cual es la respuesta correcta:

$$\text{a) } \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} = \begin{cases} -1 \\ \frac{(x^2 + y^2)(x - y)(x + y)}{x^2 y^2} \\ \frac{x^4}{y^4} \end{cases}$$

$$\text{b) } \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2} = \begin{cases} x^2 - y^2 \\ -2 \\ x^2 + y^2 \end{cases}$$

**Ejercicio 10:** Reducir a la mínima expresión y simplificar:

**a)**  $\frac{9y - 9}{y - 1} =$

**d)**  $\frac{z^2 - z - 2}{z - 1} \cdot \frac{z^2 - 1}{z + 1} =$

**b)**  $\frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} =$

**e)**  $\frac{x + 3}{x^2 - 1} : \frac{x^2 + 6x + 9}{2x - 2} =$

**c)**  $\frac{a^2 - 7a + 12}{5a - 15} =$

**f)**  $\frac{a - b}{a + b} + \frac{a}{a - b} - \frac{a^2 + ab}{a^2 - b^2} =$