UNIDAD N° 1: TEORÍA DE CONJUNTOS – CONJUNTOS NUMÉRICOS

ÍNDICE GENERAL DE LA UNIDAD

CONSEJOS A TENER EN CUENTA ANTES DE EMPEZAR:

- ✓ ***LEER CON MUCHA ATENCIÓN LOS CONTENIDOS.***
- ✓ ***PONER ÉNFASIS EN LOS EJEMPLOS.***
- ✓ ***RESOLVER MINUCIOSAMENTE LOS EJERCICIOS.***
- ✓ ***CONSULTAR LAS DUDAS QUE PUEDAN SURGIR.***

CONJUNTOS

NOCIÓN INTUITIVA DE CONJUNTO

La palabra CONJUNTO nos remite, intuitivamente a una agrupación o colección de objetos que reciben el nombre de elementos. Esta idea nos sirve para introducirnos en el concepto de conjuntos que, en Matemática es un término primitivo. Es decir no lo definimos, no contestamos a la pregunta ¿qué es?

Los conjuntos se designan con letras mayúsculas imprenta: A, B , C, … y los elementos con letras minúsculas imprenta: a, b, c, d….

Si **a** es un elemento del conjunto **A**, dicho elemento **pertenece** al conjunto y escribimos **a** $\in$**A.**

En caso contrario, si **a** no es un elemento de **A** se simboliza **a** $\notin$ **A.**

FORMAS DE DEFINIR UN CONJUNTO

Si queremos indicar el conjunto de las vocales podemos escribir:

A = {x / x sea una vocal}   ó   A = {a, e, i, o, u}

Un conjunto está definido por **extensión o enumeración, cuando entre llaves figuran** todos sus elementos.

Ejemplos:

a) A = {a, e, i, o, u}

b) B = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

Un conjunto está definido por **comprensión,** cuando se enuncia la propiedad que caracteriza a sus elementos.

Ejemplos:

a) A = {x / x sea una vocal}

b) B = {x / x es día de la semana}

CONJUNTOS NOTABLES

Conjunto Vacío: se simboliza con ϕ y es aquel conjunto que no posee elementos.

Ejemplo: A = {números impares entre 5 y 7} = $\emptyset$

No existe ningún número impar entre los números 5 y 7.

Conjunto Universal: se simboliza con **U** y es aquel conjunto que contiene todos los elementos del tema en estudio; por lo tanto no es fijo y se debe fijar de antemano.

Nota: Si un conjunto tiene **n** elementos, se dice que es **finito**, caso contrario el conjunto es **infinito**.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

- **Números Naturales: N**

Los números naturales fueron los primeros que utilizó el ser humano para contar objetos. El conjunto de los números naturales tiene infinitos elementos y se simboliza

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4,5,\ldots..\}$$

Los puntos suspensivos indican que en N no hay último elemento, pero sí existe primer elemento que es el número 1y además todo número natural, llamémosle x, tiene su número natural consecutivo o siguiente, x + 1.

Al conjunto de los naturales con el cero incluido, se simboliza:

$$\mathbf{N_0} = \{0,1, 2, 3, 4,5,\ldots..\}$$

Los números naturales constituyen un conjunto **cerrado** para las operaciones de **suma** y **multiplicación** ya que, al operar con cualquiera de sus elementos, el resultado siempre será un número natural: $5 + 6 = 11$; $8.5 = 40$.

No ocurre lo mismo, en cambio, con la **resta**; por ejemplo 8 – 3 es un número natural, pero 3 – 8 no es un número natural; como consecuencia de ello surgen los **números negativos.**

- **Números enteros: Z**

Los **números enteros** abarcan a los números **naturales**, el **cero** y a los **números negativos**.

$$\mathbf{Z} = \{\ldots..,-5,-4,-3,-2,-1,0,1, 2, 3, 4,5,\ldots..\}$$

Todo número natural es un número entero.

Los números enteros permiten expresar cantidades negativas como un saldo deudor en una cuenta bancaria, un año de la era antes de Cristo, el número de una planta del sótano de un edificio, la representación de profundidades bajo el nivel del mar, temperaturas bajo cero, etc.

El conjunto de los números enteros es **cerrado** para la suma, la resta y el producto; sin embargo, la división de dos números a:b no siempre es un número entero. Es por ello que surge el conjunto de los números fraccionarios o racionales.

❖ **Números racionales: Q**

Se llama **números racional** a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros con denominador **distinto de cero**.

El término «racional» alude a «ración» o «parte de un todo».

Un número racional es un decimal finito o infinito periódico; por ejemplo, el número decimal finito 0,75 es la representación decimal del número racional $\frac{3}{4}$ y el número decimal infinito periódico 0,333... es la representación decimal del número racional $\frac{1}{3}$.

Luego, un número es racional si verifica alguna de las siguientes condiciones:

- *es un número entero (positivo, negativo o 0).*
- *es un número fraccionario.*
- *es un número decimal, con un número finito de cifras.*
- *es un número decimal periódico.*

❖ **Números irracionales: I**

Los números decimales que tienen infinitas cifras no periódicas, se denominan **números irracionales**: π, $\sqrt{2}$, e, $\sqrt{3}$, etc.

❖ **Números reales: R**

El conjunto formado por los números irracionales y racionales es el conjunto de los **números reales**.

Todo número natural es un número real.
Todo número entero es un número real.
Todo número racional es un número real.
Todo número irracional es un número real.

A tener en cuenta!!!
Entre dos naturales siempre hay un número finito de naturales entre ellos.
Entre dos números enteros hay un número finito de enteros entre ellos.
Entre dos números racionales hay infinitos racionales entre ellos.
Entre dos números reales hay infinitos reales entre ellos.

❖ **Números Complejos: C**

Al tratar de resolver igualdades como $x^2 + 4 = 0$, aparecen expresiones como $\sqrt{-4}$ que no es posible resolver en el conjunto de los números reales, ya que ningún número real elevado al cuadrado es igual a –4.

Por ello surgieron los **números imaginarios** para que sea posible la radicación de números reales negativos: $\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4}\,.\,\sqrt{-1} = 2.i$

Se denomina **unidad imaginaria** a **i =** $\sqrt{-1}$ y es tal que $\mathbf{i}^2 = -1$

Al conjunto formado por los números reales y los números imaginarios se lo denomina n**úmeros Complejos.**

Todo número natural es un número complejo.

Todo número entero es un número complejo.

Todo número racional es un número complejo.

Todo número irracional es un número complejo.

Todo número real es un número complejo.

ACTIVIDAD

Dados los siguientes conjuntos: A = {0, 2, 4, 6, 8},
B = {1, 2, 3, 4, 5, 6},
C = {x/x es dígito mayor que 3}

Indicar verdadero (V) o falso (F) en las siguientes afirmaciones:

a) $7 \in B$

b) $3 \notin C$

c) $8 \in A$

d) $5 \notin B$

e) $0 \in A$

f) $9 \notin C$

g) $11 \notin A$

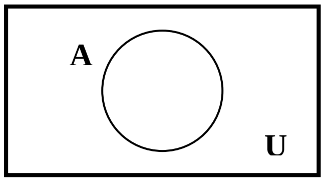
h) $8 \in B$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE CONJUNTOS

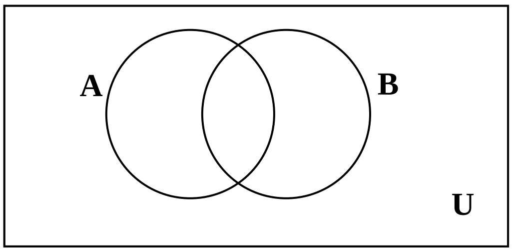
DIAGRAMAS DE VENN

Los conjuntos pueden representarse gráficamente mediante diagramas de Venn, en honor al matemático John Venn.

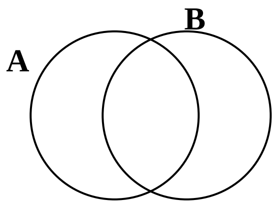
El conjunto universal se representa con un rectángulo, y el diagrama para un conjunto A cualquiera es una curva cerrada en cuyo interior se colocan puntos que representan a los elementos del conjunto A.



El diagrama de Venn más general para representar dos conjuntos cualesquiera es:



o simplemente



Los diagramas de Venn sólo se utilizan para representar gráficamente conjuntos **finitos.**

ACTIVIDAD

Representar, en un mismo diagrama de Venn, los siguientes conjuntos:

U = {x/x es dígito}, A = {0, 2, 4, 6, 8}, B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, C = {x/x es dígito mayor que 3}

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS REALES

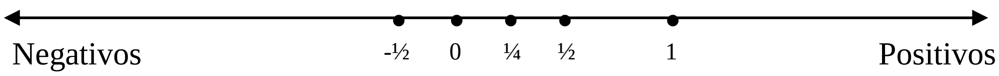
Los números reales se representan geométricamente en la recta numérica, esto es, se indica sobre una recta un punto fijo **O** que se llama **origen** y que corresponde al número real cero.

Considerando un segmento unitario como unidad de medida, a la derecha de **O** se indican los puntos que corresponden a los números reales positivos ($\mathbf{R}^+$) y a la izquierda de **O** los puntos que corresponden a los números reales negativos ($\mathbf{R}^-$).

De esta manera, a cada número real le corresponde un único punto de la recta, y a cada punto de la recta, un único número real.

Para representar gráficamente un número fraccionario en la recta numérica, se divide la unidad en tantas partes como lo indique el denominador de la fracción y luego se toman tantas partes de la subdivisión como lo indique el numerador.

<u>Ejemplo</u>:



ACTIVIDADES

1. Dar un ejemplo de un número:

a) entero no natural

b) imaginario puro

c) real no entero

d) fraccionario entero

e) real no complejo

2. Indicar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

a) 0 es un número natural.

b) 6 es un número entero.

c) $\sqrt[3]{-2}$ es un número real.

d) -5 es un número racional.

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ es un número racional.

f) $\sqrt{-1}$ es un número real.

g) $(-3)^2$ es un número natural.

h) 1,3 es un número irracional

i) Con los elementos de **Q** se puede medir cualquier longitud.

j) Todo número entero es positivo o negativo.

k) 0 es un número entero par.

l) –5 está a la derecha de –7 en la recta numérica.

3. Determinar la verdad o falsedad de los siguientes enunciados.

a) Si a y b son números naturales entonces a – b es un número natural.

b) Si a es un número natural y b es un número entero entonces a.b es un número entero.

c) Si a y b son números enteros entonces $\frac{a}{b}$ es un número racional.

d) Si a es un número entero entonces a^2 es un número natural.

e) Si a es un número natural entonces $\sqrt{a}$ es un número natural.

f) Si a es un número entero entonces $\sqrt{a}$ es un número real.

4. Escribir un número real que esté comprendido entre cada par de números dados.

a) 0,6 y 0,8

b) 0 y 1

c) 0,7 y 0,8

d) 2,34 y 2,36

e) 2,34 y 2,35

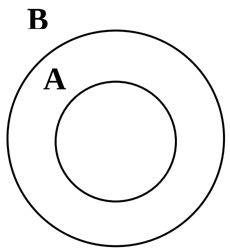
f) 0,9 y 1

5. Representar en la recta real los siguientes números: -4 ; $-\frac{1}{2}$; 1,5 ; $-\frac{5}{2}$, 3,5

INCLUSIÓN - SUBCONJUNTOS

Se dice que el conjunto A está **contenido** en B (o que A es un **subconjunto** de B), y se simboliza $A \subseteq B$, si todos los elementos de A son elementos de B.

Gráficamente:



En caso contrario, se dice que A no está contenido en B (o que A no es subconjunto de B) y se simboliza $A \not\subset B$.

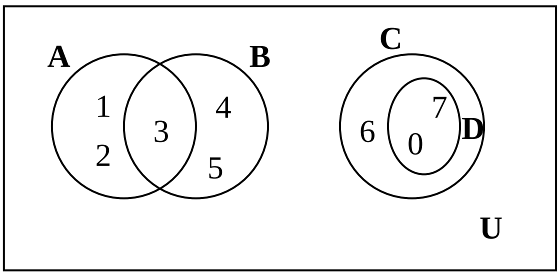
Ejemplos:

a) $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$

b) $\{2, 4, 6\} \subseteq \{2, 4, 6, 8\}$

c) $\{1, 3, 6, 7\} \not\subset \{1, 3, 6, 9\}$

d) $U = \{x \,/\, x \in N_0 \text{ y } x \leq 7\}$



$A \subseteq U$

$B \subseteq U$

$C \subseteq U$

$D \subseteq U$

$D \subseteq C$

Observación: Para cualquier conjunto A se verifica que:

- $\phi \subseteq A$
- $A \subseteq A$
- $A \subseteq U$

La **pertenencia** vincula **elementos** con **conjuntos** y la **inclusión** vincula **conjuntos** con **conjuntos.**

Ejemplos

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$$

Naturales: **N**

Cero: 0

N_0

Negativos: **Z^-**

Enteros**: Z**

Fraccionarios (Decimales)

Racionales: **Q**

Irracionales**: I**

Reales: R

ACTIVIDADES

1. En base a los conjuntos dados colocar $\subseteq$ o $\not\subset$ según corresponda:

U = {x / x es número natural}

A = {x / x es número natural impar}

B = {x / x es número natural múltiplo de 2}

C = {x / x = 4.n, con n número natural}

a) A......U

b) A......B

c) C…..B

d) B…..A

e) B….C

f) C…..A

g) A…..C

h) B…..U

2. Dados A = {a, b, c} y B = {1, 2}, decir si es verdadero o falso:

a) {a, b} $\subseteq$ A.............

b) {a} $\in$ A..................

c) 1 $\in$ B.....................

d) {1, 2} $\in$ B.............

OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

❖ Suma o resta de números fraccionarios

A) Fracciones de igual denominador

Para sumar (o restar) dos números fraccionarios de igual denominador se procede de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}}$$

Ejemplos:

a) $\frac{3}{5} + \frac{9}{5} = \frac{3+9}{5} = \frac{12}{5}$

b) $\frac{3}{5} - \frac{9}{5} = \frac{3-9}{5} = \frac{-6}{5}$

B) Fracciones de distinto denominador

Para sumar (o restar) dos números fraccionarios de igual denominador se procede de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(m:b).a \pm (m:d).c}{m}; \quad \text{donde } m = \text{m.c.m}(b,d)$$

Ejemplos:

a) $\frac{3}{5} + \frac{9}{15} = \frac{3.3+1.9}{15} = \frac{9+9}{15} = \frac{18}{15}$

b) $\frac{3}{5} - \frac{9}{15} = \frac{3.3-1.9}{15} = \frac{9-9}{15} = \frac{0}{15} = 0$

❖ Multiplicación de números fraccionarios

Para multiplicar dos números fraccionarios se procede de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}}$$

En la multiplicación de fracciones se simplifica cruzado.

Ejemplos:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2.5}{3.7} = \frac{10}{21}$

b) $\frac{8}{9} \cdot \frac{15}{4} = \frac{8.15}{9.4} = \frac{\overset{10}{\cancel{120}}}{\underset{3}{\cancel{36}}} = \frac{10}{3}$

Si se simplifica antes de multiplicar se obtiene: $\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}\cdot\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{1}=\frac{2.5}{3.1}=\frac{10}{3}$

❖ División de números fraccionarios

Para dividir dos números fraccionarios se procede de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.c}}$$

En la división de fracciones se simplifica horizontal.

Ejemplos:

a) $\frac{2}{3}:\frac{5}{7}=\frac{2.7}{3.5}=\frac{14}{15}$

b) $\frac{16}{3}:\frac{8}{5}=\frac{16.5}{3.8}=\frac{\overset{10}{\cancel{80}}}{\underset{3}{\cancel{24}}}=\frac{10}{3}$

Si se simplifica antes de multiplicar se obtiene: $\frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{3}:\frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{5}=\frac{2}{3}:\frac{1}{5}=\frac{2.5}{3.1}=\frac{10}{3}$

❖ Potenciación de números fraccionarios

a) De exponente natural:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}\text{, con } b\neq 0$$

b) De exponente entero negativo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}=\frac{b^{n}}{a^{n}}\text{, con } b\neq 0,\ a\neq 0$$

En particular: $(a)^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^{n}=\frac{1}{a^{n}}$ con $a\neq 0$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2}=\frac{3^{2}}{4^{2}}=\frac{9}{16}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2}=\frac{4^2}{3^2}=\frac{16}{9}$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{1}\right)^{2}=\frac{4^2}{1^2}=\frac{16}{1}=16$

d) $(-3)^{-2}=\left(\frac{-1}{3}\right)^{2}=\frac{(-1)^2}{3^2}=\frac{1}{9}$

❖ **Radicación de números fraccionarios**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\text{, con } b\neq 0$$

Si **n es par** entonces $\frac{a}{b}$ debe ser **mayor o igual a cero**.

Ejemplos:

a) $\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}=\frac{3}{5}$

b) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}=-\frac{2}{3}$

PROPIEDADES DE ALGUNAS OPERACIONES

❖ **Propiedad distributiva del producto respecto a la suma:**

$$(a+b)\bullet c=a\bullet c+b\bullet c \quad \text{con } a,b,c\in \mathbb{R}$$
$$a\bullet(b+c)=a\bullet b+a\bullet c \quad \text{con } a,b,c\in \mathbb{R}$$

❖ **Propiedad distributiva del cociente respecto a la suma:**

$$(a+b):c=a:c+b:c \quad \text{con } a,b,c\in \mathbb{R} \quad c\neq 0$$

❖ **Propiedades de la potenciación:**

$a^0=1$, con $a\neq 0$

$1^n=1$

Potencia de un producto: $(a\bullet b)^p=a^p\bullet b^p$; con $p\in \mathbb{Q}$

Potencia de un cociente $\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$; con $p\in \mathbb{Q}$ $b\neq 0$

Potencias de potencias: $\left(a^p\right)^q = a^{p\cdot q}$; con p y q $\in \mathbb{Q}$

Producto de potencias de igual base: $a^m \bullet a^p = a^{m+p}$

Cociente de potencias de igual base: $\dfrac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$; con $a \neq 0$

❖ **Propiedades de la radicación:**

Radicación de un producto: $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

Radicación de un cociente: $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$, con $b \neq 0$

Radicación como potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Ejemplos:

a) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^5 . \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{5+(-3)} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$

b) $z^2.z^{-1}.z^{-3}.z^5 = z^3$

c) $3^2.3^{-3}.3^{-4}.3 = 3^{-4} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{1}{81}$

d) $b^5 : b^2 = b^{5-2} = b^3$

e) $\dfrac{y^6}{y^7} = y^{6-7} = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$

f) $\dfrac{5^3}{(7-2)^3} = 5^{3-3} = 5^0 = 1$

g) $\left(2^2\right)^3 = 2^{2.3} = 2^6 = 64$

h) $\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^4\right)^{-1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{16}{81}$

La radicación y potenciación NO distribuyen respecto de la suma o resta:

$$\left(a \pm b\right)^n \neq a^n \pm b^n ; \quad \sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

ACTIVIDADES

1. Unir con una flecha según corresponda:

$x + x$	$2x^2$
$x.x$	$2x$
$2.x.3.x$	$4x^2$
$x^2 + x^2$	$6x^2$
$2.x + 4.x$	$(2x)^3$
$(2x)^2$	$6x$
$2.x.4.x^2$	x^2

2. Colocar el símbolo = o ≠ según corresponda, para que los siguientes enunciados sean verdaderos.

a) $(20 - 7) - 8$ ………. $20 - (7 - 8)$

b) $(5 + 3)^2$ ………. $5^2 + 3^2$

c) $\frac{9+7}{15}$ ………. $\frac{9}{15}+\frac{7}{15}$

d) $\frac{9.7}{15}$ ………. $\frac{9}{15}.\frac{7}{15}$

e) $\frac{9+5}{25}$ ………. $\frac{9+1}{5}$

f) $\frac{9.5}{25}$ ………. $\frac{9}{5}$

g) $1-\frac{2}{3}$ ……….$1+\left(\frac{-2}{3}\right)$

h) $-x^2$ ………. $(-x)^2$

i) 3.2^2 ………. 6^2

3. Indicar para qué valores de x tienen significado las siguientes expresiones en el conjunto de los números reales.

a) $\frac{8}{x}$

b) $\frac{4}{x+2}$

c) $\frac{0}{x-1}$

d) $\frac{x}{3+2}$

h) $\frac{8}{x^2-9}$

i) $\sqrt{x-5}$

j) $\frac{2}{\sqrt{x}}$

k) $\frac{1}{x^3}$

e) $\dfrac{4}{x^2}$

f) $\dfrac{-6}{(x-3)(x+3)}$

g) $\dfrac{3}{x^2+3}$

l) $\dfrac{5}{x^3-1}$

m) $\sqrt[3]{x+5}$

n) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{x-3}}$

4. Clasificar en verdaderos o falsos los siguientes enunciados.

a) Si a>0 y b>0 entonces a.b >0

b) Si a>0 y b>0 entonces a.b = b.a

c) Si a>0 y b<0 entonces $a^3 > b^5$

d) Si a>0 entonces a.3 < -5

e) Si b>0 entonces 4 < b.b.b

5. Resolver las siguientes operaciones e indicar al o los conjuntos a los que pertenece el resultado.

a) $\left[4^3-5(8+2)\right]:7=$

b) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}=$

c) $4+\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{3}=$

d) $\sqrt{3}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}=$

e) $\sqrt{1+\dfrac{9}{16}}=$

f) $\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-\frac{4}{5}}:\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{5}}=$

g) $\left(\dfrac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}}.\left(\dfrac{9}{16}\right)^{-1}.\left(\dfrac{9}{16}\right)^{\frac{3}{4}}=$

h) $\dfrac{11\bullet(-3)^2+5^0}{7^2+1}+1^3-3=$

m) $\sqrt{\dfrac{5}{4}+1}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{0}:2=$

n) $\sqrt{-\dfrac{1}{3}.\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}+\dfrac{1}{3}:\left(-\dfrac{1}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}}=$

ñ) $\sqrt[3]{16}\div\sqrt[3]{-2}+\sqrt{-\dfrac{1}{2}}.\sqrt{-50}=$

o) $\left(2-\dfrac{4}{3}\right)^{-1}.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}-\sqrt[3]{-\dfrac{1}{27}}\div\left(-\dfrac{1}{3}\right)-(-2)^{-1}=$

p) $\sqrt{2^2.3^2}-\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-7}.\left(\dfrac{3}{5}\right)^{5}.\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-2}+\left(3-\dfrac{1}{2}\div\dfrac{1}{6}\right)=$

q) $\left[-\dfrac{1}{3}.\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}+\dfrac{1}{3}\right]:\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}\right]+1=$

r) $\dfrac{3}{2}:\left(1-\dfrac{5}{3}\right)^{-1}-\sqrt[3]{-\dfrac{1}{27}}:\left(-\dfrac{1}{3}\right)-(-2)^{-1}=$

s) $\left(2-\dfrac{4}{3}\right)^{-1}.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}-\sqrt[3]{-\dfrac{1}{27}}:(3)^{-1}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=$

i) $\dfrac{-\frac{1}{5}+\left[\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\right]}{-3}=$

j) $-\dfrac{4}{5}\cdot\left(\dfrac{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}}{2-\frac{1}{2}}\right)=$

k) $-\dfrac{1}{3}.\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}+\dfrac{1}{3}:\left(-\dfrac{1}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=$

l) $-\dfrac{1}{3}.\left[\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}+\dfrac{1}{3}:\left(-\dfrac{1}{3}\right)\right]-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=$

t) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{7}:\left(\dfrac{3}{5}\right)^{5}+\sqrt{\left(\dfrac{25}{9}\right)^{-1}}:\dfrac{3}{5}-\left(1-\dfrac{2}{5}\right)=$

u) $\left(\dfrac{1}{4}-1\right)^{2}+\sqrt[3]{-1+\dfrac{7}{8}}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}.\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{3}=$

v) $\sqrt{(-1)\left(\dfrac{3}{4}-1\right)}+(-2).(2)^{-2}+\left(1-\dfrac{1}{2}:2\right)=$

w) $\sqrt{\dfrac{4^2\cdot 9^2}{25}}+\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-1}\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{0}-\left(2-\dfrac{3}{5}\right)=$

6. Resolver:

a) $y^{\frac{1}{2}}\;.\;y^{\frac{3}{4}}.\,y^{\frac{2}{3}}=$

b) $y^{\frac{1}{2}}\;.\;y^{-\frac{3}{4}}.\,y^{\frac{1}{4}}=$

c) $\dfrac{2x}{3}+\dfrac{1x}{2}-\dfrac{4x}{3}=$

d) $\left(-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{5}x\right).3x=$

e) $\sqrt[3]{3x^3-4x^3+\dfrac{7}{8}x^3}=$

f) $\dfrac{\left(x^5\right)^2.\left(x^{-3}\right)^4x^3}{x^3-6x^3+4x^3}=$

g) $\dfrac{\left(x^2\right)^3.y^2.y^3.z^0}{\sqrt[3]{x^3}.y^4}=$

h) $\dfrac{\left(k^2\right)^{-2}.\left(x^3\right).12z^4}{x^2.3k^3.4z^3}=$

i) $\dfrac{3.2^n-4.2^n}{2^n+2.2^{n-1}}=$

j) $\dfrac{2^{n+1}}{\left(2^n\right)^n.2^{-1}}:\dfrac{2.2^{n+1}}{\left(2^{n-1}\right)^{n+1}}=$

7. Verificar las siguientes igualdades.

a) $\dfrac{2n+1}{2}-(n+1)=-\dfrac{1}{2}$

b) $3^n-1+2.3^n=3^{n+1}-1$

c) $\dfrac{3.(n+1)}{6}-\dfrac{n+1}{3}=\dfrac{n+1}{6}$

d) $1-3^{n+1}-6.3^n=1-3^{n+2}$

e) $4^n-1+3.4^n=4^{n+1}-1$

SUBCONJUNTOS DE LOS NÚMEROS REALES: INTERVALOS

Un **intervalo** es un conjunto infinito de números reales comprendidos entre dos valores fijos que se denominan **extremos del intervalo**.

TIPOS DE INTERVALOS

- **Intervalo Abierto** (a, b) es el conjunto de los números reales mayores que a y menores que b con a < b, donde **a** y **b** son los extremos que **No** pertenecen al intervalo.

  Se escribe: $(a, b) = \{ x \in R \ / a < x < b\}$

- **Intervalo Cerrado** [a, b] es el conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b con a < b, donde **a** y **b** son los extremos que **Sí** pertenecen al intervalo.

  Se escribe: $[a, b] = \{ x \in R \ / a \leq x \leq b\}$

Se pueden realizar las combinaciones con los extremos llamándolos:

- **Intervalos semiabiertos** cuando son de la forma:

  $(a, b] = \{ x \in R \ / a < x \leq b\}$

  $[a, b) = \{ x \in R \ / a \leq x < b\}$

- **Intervalos Infinitos:** Se presentan las siguientes posibilidades

a) $(-\infty, b)$ conjunto de los números reales menores que b.

$(-\infty, b) = \{x \in R \ / x < b\}$

b) $(-\infty, b]$ conjunto de los números reales menores o iguales que b.

$(-\infty, b] = \{x \in R \ / x \leq b\}$

c) $(a, +\infty)$ conjunto de los números reales mayores que a.

$(a, +\infty) = \{x \in R \ / x > a\}$

d) [a, $+\infty$) conjunto de los números reales mayores o iguales que a.

[a, $+\infty$) = {x $\in$ R / x $\geq$ a}

En resumen se presenta la siguiente tabla:

Denominación	**Notación de Intervalos**	**Notación como subconjunto de los reales**	**Forma gráfica**
Intervalo abierto	(a, b)	{x $\in$ R / a < x < b}	
Intervalo cerrado	[a, b]	{x $\in$ R / a $\leq$ x $\leq$ b}	
Intervalos semiabiertos	(a, b]	{x $\in$ R / a < x $\leq$ b}	
	[a, b)	{x $\in$ R / a $\leq$ x < b}	
Intervalos infinitos	($-\infty$, b)	{x $\in$ R / x < b}	
	($-\infty$, b]	{x $\in$ R / x $\leq$ b}	
	(a, ∞)	{x $\in$ R / x > a}	
	[a, ∞)	{x $\in$ R / x $\geq$ a}	

Observaciones:

- Los símbolos ∞ y $-\infty$ se leen "infinito positivo" e "infinito negativo" respectivamente.
- Los intervalos no se expresan por extensión
- Los intervalos no se representan gráficamente mediante diagramas de Venn.
- Los intervalos se representan gráficamente en la recta real.

ACTIVIDADES

1. Definir por extensión o intervalo según corresponda, los siguientes conjuntos:

a) $A = \{ x / x \in Z \text{ y } x \leq 12 \}$

b) $B = \{ x / x \in R \text{ y } x \leq 12 \}$

c) $C = \{ x / x \in N \text{ y } -4 < x < 6 \}$

d) $D = \{ x / x \in Z \text{ y } -4 < x < 6 \}$

e) $E = \{ x / x \in R \text{ y } -4 < x < 6 \}$

f) $F = \{x / x \in R \text{ y } (x - 1).(x + 2) = 0\}$

g) $G = \{x / x \in Z \text{ y } (x - 1).(x + 2) = 0\}$

h) $H = \{x / x \in N \text{ y } (x - 1).(x + 2) = 0\}$

i) $I = \{ x / x \in N \text{ y } (x + 1).(x -3) = 0\}$

j) $J = \{ x / x \in Z \text{ y } (x + 1).(x -3) = 0\}$

k) $K = \{ x / x \in R \text{ y } (x + 1).(x -3) = 0\}$

2. Representar los siguientes intervalos en la recta numérica:

a) $(4, +\infty)$

b) $(6, 10]$

c) $(-2, 5)$

d) $[- 3, 0]$

e) $(-\infty , -2]$

f) $[-2, 5)$

3. Expresar los siguientes conjuntos como intervalos y representarlos en la recta numérica:

a) $A = \{ x / x \in R \text{ y } -1 < x \leq 12 \}$

b) $B = \{ x / x \in R \text{ y } 4 < x \}$

c) $C = \{ x / x \in R \text{ y } x \geq -4 \}$

OPERACIONES CON INTERVALOS

Los intervalos son subconjuntos de números reales y las operaciones que se pueden realizar entre ellos son las operaciones propias entre conjuntos: unión, intersección, diferencia y complemento. Se opera entre ellos gráficamente y posteriormente se expresa simbólicamente el conjunto obtenido.

Para poder operar con intervalos necesitamos saber las operaciones entre conjuntos

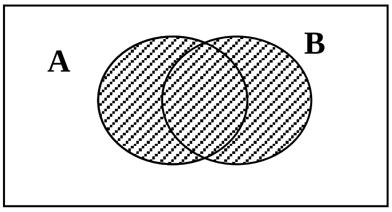
OPERACIONES CON CONJUNTOS

- **UNIÓN**

Si A y B son dos conjuntos, se define la **unión entre A y B**, que se denota **A$\cup$ B**, al conjunto cuyos elementos pertenecen a A **o** a B **o** a ambos.

Simbólicamente se expresa: $A\cup B= \{x / x \in A$ **o** $x \in B\}$

El diagrama de Venn es:

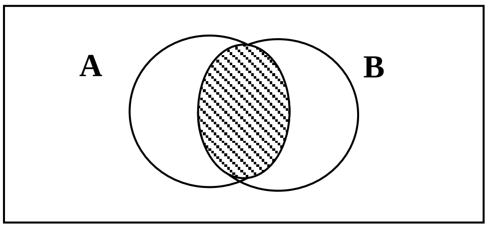


❖ INTERSECCIÓN

Si A y B son dos conjuntos, se define la **intersección entre A y B**, que se denota **A∩B**, al conjunto cuyos elementos pertenecen a A **y** a B.

Simbólicamente se expresa: $A \cap B = \{x \,/\, x \in A$ **y** $x \in B\}$

El diagrama de Venn es:

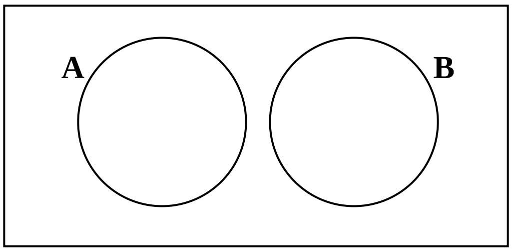


Observación:

Conjuntos disjuntos: Dos conjuntos son **disjuntos** cuando no tienen elementos comunes.

Simbólicamente: A y B son **disjuntos** si y sólo si $A \cap B = \phi$

El diagrama de Venn es:

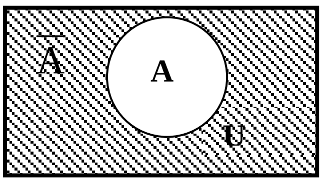


❖ COMPLEMENTO

Si U es el conjunto universal que contiene al conjunto A, se llama **complemento** de A y se simboliza $\overline{A}$, al conjunto formado por todos los elementos del universo que no pertenecen al conjunto A.

Simbólicamente: $\overline{A} = \{x \in U \,/\, x \notin A\}$

El diagrama de Venn es:

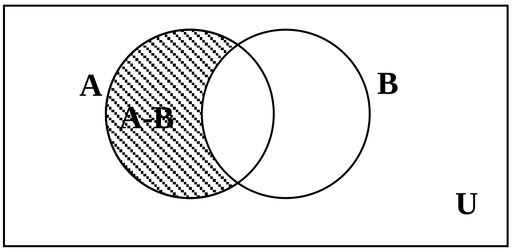


❖ **DIFERENCIA**

Si A y B son dos conjuntos, se define la **diferencia** de A y B, que se simboliza A - B al conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A que no pertenecen al conjunto B.

Simbólicamente: $A - B = \{x \mid x \in A$ **y** $x \notin B\}$

El diagrama de Venn es:



Observación: Se verifica:

- ❖ $\overline{A} = U - A$
- ❖ $A - B = A \cap \overline{B}$
- ❖ $A - B \neq B - A$ (la diferencia no es conmutativa)

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Las operaciones con conjuntos verifican las siguientes propiedades:

❖ **Propiedad conmutativa**

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $A \cap B = B \cap A$

❖ **Propiedad asociativa**

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

❖ **Propiedad distributiva**

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

❖ **Propiedad de idempotencia**

a) $A \cup A = A$

b) $A \cap A = A$

❖ **Leyes de De Morgan**

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

ACTIVIDADES

1. Sean $U = \{x / x \in N_0 : 0 \leq x \leq 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x / x \in N_0 : 5 \leq x \leq 8\}$, $D = \{3, 4\}$; $C = \{3, 4, 5, 6\}$; calcular por extensión y hacer el diagrama de Venn correspondiente

a) $A \cup B$

b) $D \cap B$

c) $A - B$

d) $C \cup D$

e) $A \cap C$

f) $\overline{A}$

g) $D - C$

h) $\overline{A \cap B}$

2. Completar las siguientes propiedades (los diagramas de Venn son a menudo útiles para identificar o justificar las propiedades).

a) $A \cup U$ =................

b) $A \cup \phi$ =................

c) $A \cap U$ =................

d) $A \cap \phi$ =................

e) $\overline{\phi}$ = ...

f) $\overline{U}$ = ...

g) $\overline{\overline{A}}$ = ...

3. En una provincia existen 16 colegios pequeños, privados y mixtos.

De un total de 200 colegios mixtos que existen en la zona, 60 están clasificados como privados y 36 como pequeños. De 150 privados, 10 son pequeños pero no mixtos. Existen 20 estatales grandes y no mixtos y 50 pequeños no mixtos.

Se necesita saber:

a) ¿Cuántos colegios existen en total?

b) ¿Cuántos colegios pequeños mixtos son estatales?

c) ¿Cuántos colegios privados y mixtos son grandes?

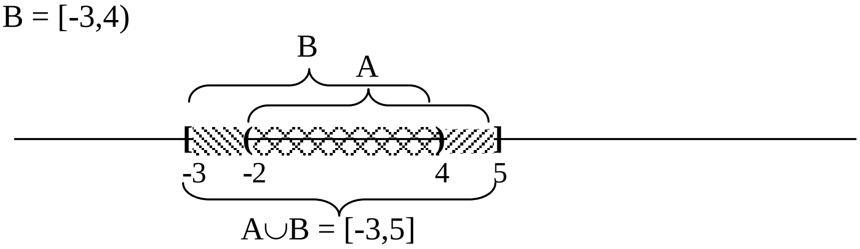
OPERACIONES CON INTERVALOS

❖ UNIÓN DE INTERVALOS: A∪B

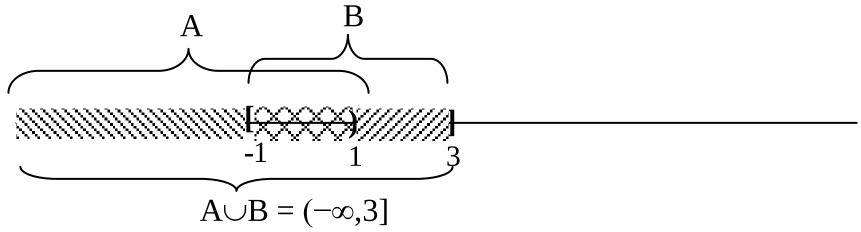
Se representan gráficamente ambos conjuntos en la recta numérica y la unión de intervalos es la sección de la recta numérica que se encuentra rayada.

Ejemplos:

a) $A = (-2,5]$ y $B = [-3,4)$



b) A = (−∞,1) y B = [-1,3]

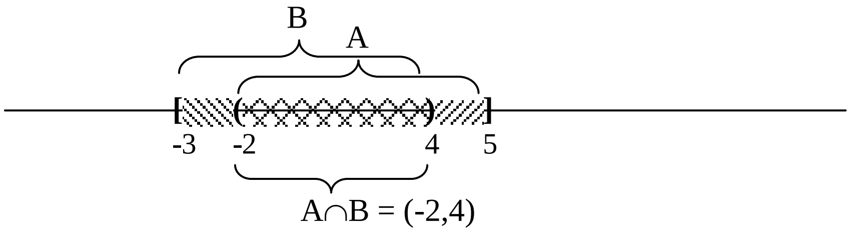


❖ INTERSECCIÓN DE INTERVALOS: A∩B

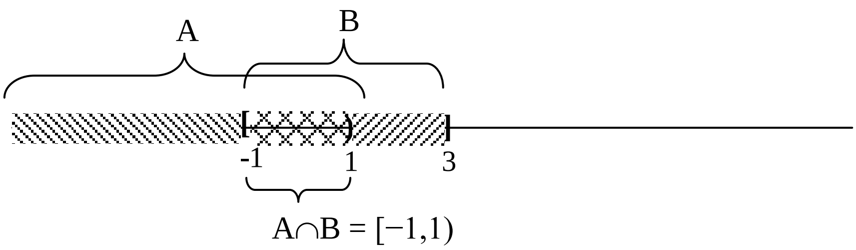
Se representan gráficamente ambos conjuntos en la recta numérica y la intersección de intervalos es la sección de la recta numérica común a ambos, que se encuentra doblemente rayada.

Ejemplos:

a) A = (−2,5] y B = [-3,4)



b) A = (−∞,1) y B = [-1,3]

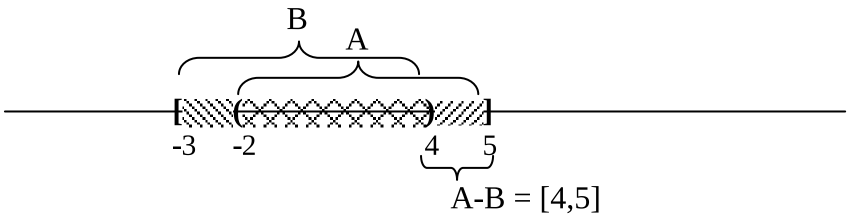


❖ DIFERENCIA ENTRE INTERVALOS: A− B

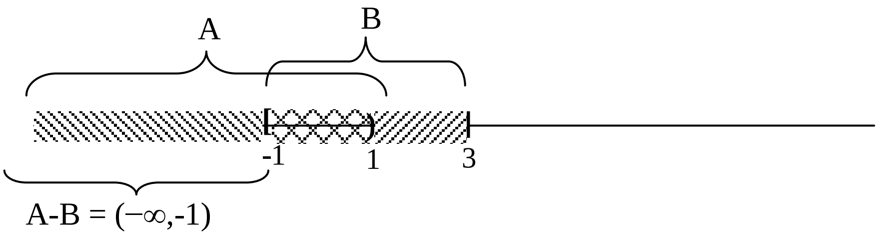
Se representa gráficamente el conjunto A en la recta numérica, luego se le quita lo rayado por el conjunto B.

Ejemplos:

a) A = (−2,5] y B = [-3,4)



b) A = (−∞,1) y B = [-1,3]

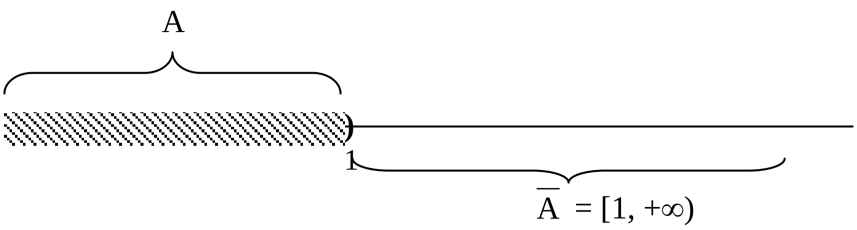


- ❖ **COMPLEMENTO DE UN INTERVALO**

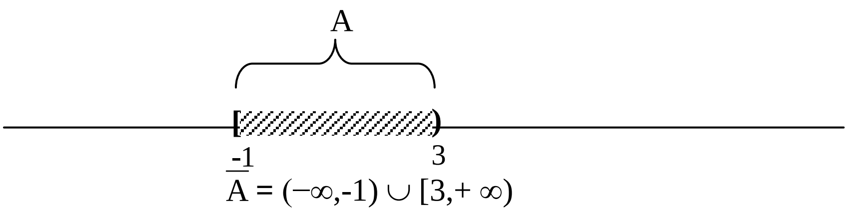
Se representa gráficamente el conjunto A en la recta numérica, luego el complemento de A es la sección de la recta numérica sin sombrear.

Ejemplos:

a) A = (−∞,1)



b) A = [-1,3)



ACTIVIDAD

Calcular A∪B, A∩B, A−B y $\overline{A}$

a) A **=** [3 , 5) ; B = [1 , 4]

b) A = (–2, 5) ; B = (–4 , 2]

c) A = (– ∞ , 4) ; B = [–3 , –1]

d) A **=** (–2 , 7) ; B = [7 , 9)

e) A **=** (3 , 6) ; B = (4 , + ∞)

f) A = (–3, + ∞) ; B = (– ∞ , –1]

EJERCICIOS PRÁCTICOS

Ejercicio 1: Analizar los siguientes enunciados, responder: nunca, siempre, a veces; según corresponda. Ejemplificar la respuesta.

a) Si *m* y *t* son números enteros entonces *m* • *t* es un número natural.

b) Si *a* es un número entero entonces a^n (con $n \in$ N impares) es un número natural.

c) Si n $\in$ R entonces $\sqrt{n}$ es un número real.

d) Si p $\in$ N entonces $\sqrt{p}$ es un número natural.

e) Si m, t $\in$ Z y t $\neq$ 0 entonces $\frac{m}{t}$ es un número racional.

f) Si m $\in$ R entonces $\sqrt{m}$ es un número irracional.

g) Si m, t $\in$ N entonces $m - t$ es un número natural.

Ejercicio 2: Definir por extensión o por comprensión los siguientes conjuntos:

a) El conjunto de los números naturales impares menores de 11.

b) El conjunto de los números naturales pares mayor que 10 y menor que 20.

c) A = $\{ x / x \in N \text{ y } 0 \leq x \leq 12 \}$

d) B = $\{ x / x \in Z \text{ y } 0 \leq x \leq 12 \}$

e) C = $\{ x / x \in R \text{ y } x^2 - 4 = 0 \}$

f) D = $\{ x / x \in N \text{ y } x^2 - 4 = 0 \}$

g) E = $\{ x / x \in Z \text{ y } x^2 - 4 = 0 \}$

Ejercicio 3: Representar gráficamente los siguientes números:

$$2+\frac{1}{2}; \quad \sqrt{9+7}; \quad \frac{1}{3}-2; \quad \sqrt{9{,}4}; \quad \sqrt[3]{-27}$$

Ejercicio 4: Unir con la respuesta correcta

a) $1 - 7 + 4 =$	1
b) $-8 - (5 - 3) + \sqrt{25} =$	$\frac{11}{2}$
c) $20 - \left\{10 + \frac{1}{2} - (4-8)\right\} =$	-5
d) $\frac{10+4}{10-4} =$	-2
e) $(-2)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$	$\frac{1}{18}$
f) $\frac{(-10)^0 + (-2)^{-1}}{(-3)^2} =$	$\frac{7}{3}$

Ejercicio 5: Aplicar propiedades adecuadas para resolver las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{4}+2\sqrt{9}=$

b) $\sqrt{5^2-3^2}-(7-9)^3-\left\{\left[(-5)^3\right]^{-1}\right\}^0=$

c) $15\sqrt{6}+2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{25}=$

d) $2^3-\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-2(5-10)\right]+\sqrt{2.8}=$

e) $\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{6}+1{,}2\sqrt{24:(-2)^2}=$

f) $\frac{3+\frac{1}{5}}{2+\frac{2}{5}}-\frac{3-\frac{2}{3}}{\left(2-\frac{1}{3}\right).7}=$

g) $\frac{\left(\sqrt{0{,}09}+\frac{1}{2}+0{,}7\right)^2-\left(0{,}7-\frac{1}{5}\right)^2}{\frac{3}{2}-\sqrt{0{,}25}}=$

Ejercicio 6: Reducir las siguientes expresiones:

a) $\frac{4^0.\left(5^{1/2}\right)^{2/3}\left(2^{-3}\right)^2}{5^3.\left(2^{10}\right)^{-1/2}.2^2}=$

b) $\frac{64.7^0.7^{-3}.(-6)^2}{36.\left(2^{1/5}\right)^{10}.\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}}=$

c) -2ab – ba =

d) $(-ab)^2-(ba)^2=$

e) $(xy-yx)\frac{\sqrt{4x^3y^3}}{\sqrt{xy^5}}=$

f) $xyz^2-x^2yz-yz^2x-yx^2z+3x^2yz=$

g) $x(-y)(-z)^2(-yx)+(3zyx)^2+3(-y)(-2z)^2(-x)(-yx)=$

h) $\frac{z^{-3}.a^5.b^{3/2}}{a^{-1}.z^{-7}.b^0}=$

i) $\sqrt[3]{m^4.\sqrt{\frac{m^4}{y^6}}}=$

j) $\frac{\sqrt[6]{x^2\left(\frac{1}{x}\right)^{-4}}}{9m^{-2}.x}=$

k) $\left(\frac{x-3y}{5}\right)^0\frac{\sqrt[3]{x^3\,27y^6}}{\sqrt[6]{y^3x^6}}=$

l) $\frac{\left(p^{-3}\right)^2h^8t^{5/3}\sqrt[3]{t}}{h^{-1/2}\left(p^{-2}\right)^2}=$

Ejercicio 7: Dados los conjuntos U = N, A = {1, 2, 3, 5}, B = {x ∈ N / (x - 5).(x + 3) = 0},

C ={x ∈ N / x ≤ 4} y D = {x ∈ N / x es par menor que 10}, se pide:

a) Definir por extensión los conjuntos B, C y D.

b) Establecer todas las relaciones de inclusión entre los conjuntos dados.

c) Determinar los conjuntos disjuntos.

d) Calcular:

$A \cap B$; $C \cap D$; $B \cup C$; $A \cup B$; $\overline{C}$; $A - B$; $B - A$; $B - D$; $A \cup B \cup \overline{C}$; $(A - B) \cap (B \cup C)$; $\overline{C} \cup (B - D)$

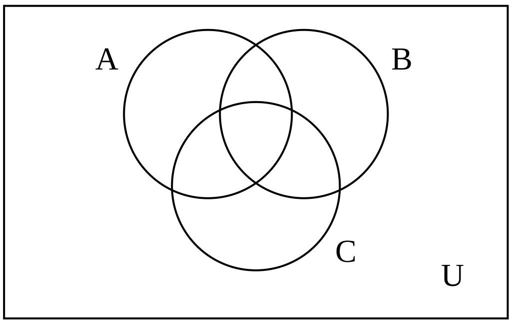
Ejercicio 8: Sombrear el área correspondiente a la operación indicada.

a) $A \cap B \cap C$

b) $(A \cup B) - C$

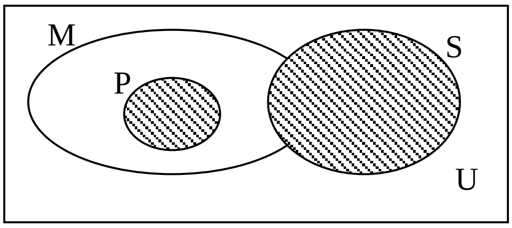
c) $\overline{A \cup B \cup C}$

d) $(B \cap C) - A$

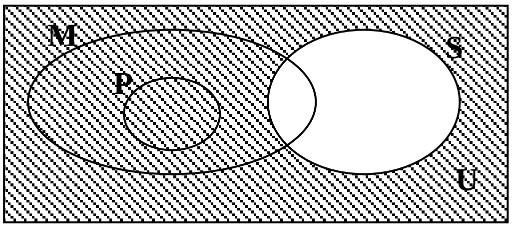


Ejercicio 9: Determinar el conjunto sombreado.

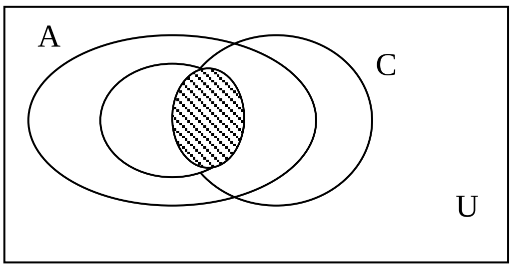
a)



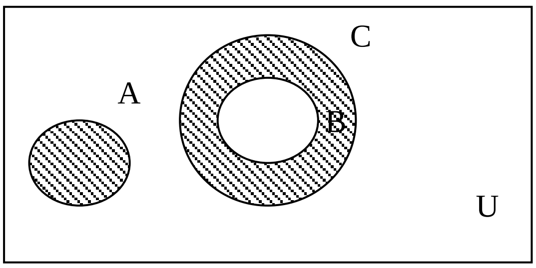
b)



c)



d)



Ejercicio 10: Un hotel dispone una serie de habitaciones con las siguientes características:

Habitación	Tipo	Situación	Baño
a	Simple	Interior	Si
b	Simple	Interior	Si

c	Doble	Interior	Si
d	Doble	Exterior	Si
e	Simple	Exterior	No
f	Doble	Exterior	Si
g	Simple	Exterior	Si
h	Simple	Exterior	No
i	Doble	Exterior	No

Considerando:

U = {a, b, c, d, e, f, g, h, i} (conjunto de habitaciones del hotel)

S: conjunto de las habitaciones simples del hotel.

I: conjunto de las habitaciones interiores del hotel.

B: conjunto de las habitaciones con baño del hotel.

Se pide:

a) Definir por extensión cada uno de los conjuntos señalados.

b) Representar en un diagrama de Venn los conjuntos U, S, I y B, ubicando los elementos en las zonas correspondientes del diagrama.

c) ¿Cuál es el conjunto de las habitaciones simples e interiores del hotel?

d) ¿Cuál el de las habitaciones con baño?

e) ¿Cuál el de las sin baño?

f) ¿Cuál el de las habitaciones dobles y exteriores?

Ejercicio 11: Resolver analítica y gráficamente:

a) $[1,3) \cup (2,3] =$

b) $[6,8) \cap [7,9) =$

c) $[4,9] \cap (7,8) =$

d) $(-3,5] - (2,3) =$

e) $\overline{(-3,5] \cap (2,3)} =$

f) $(-\infty,1) - (0,+\infty) =$

g) $(2,3]$ - $\overline{(-\infty,1)} =$

h) $\overline{(-5,0] \cap [0,8)} =$